



Méthodes de réduction de modèles en vibroacoustique non-linéaire

Youssef Gerges

► To cite this version:

Youssef Gerges. Méthodes de réduction de modèles en vibroacoustique non-linéaire. Vibrations [physics.class-ph]. Université de Franche-Comté, 2013. Français. NNT : 2013BESA2025 . tel-00933423

HAL Id: tel-00933423

<https://theses.hal.science/tel-00933423>

Submitted on 20 Jan 2014

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



SPIM

Thèse de Doctorat



école doctorale **sciences pour l'ingénieur et microtechniques**
UNIVERSITÉ DE FRANCHE-COMTÉ

Méthodes de réduction de modèles en vibroacoustique non-linéaire

■ Youssef GERGES

SPIM

Thèse de Doctorat



école doctorale **sciences pour l'ingénieur et microtechniques**
UNIVERSITÉ DE FRANCHE-COMTÉ

THÈSE présentée par

Youssef GERGES

pour obtenir le

Grade de Docteur de
l'Université de Franche-Comté

Spécialité : **Mécanique**

Méthodes de réduction de modèles en vibroacoustique non-linéaire

Soutenue le 10 juillet 2013 devant le Jury :

Noureddine BOUHADDI	Directeur de thèse	Professeur à l'Université de Franche-Comté, Besançon
Jean-François DEÛ	Rapporteur	Professeur au Conservatoire National des Arts et Métiers, Paris
Morvan OUISSE	Encadrant de thèse	Professeur à l'Ecole Nationale Supérieure de Mécanique et des Microtechniques, Besançon
Joël PERRET-LIAUDET	Rapporteur	Maître de conférences HDR, Ecole Centrale de Lyon
Michel POTIER-FERRY	Examineur	Professeur à l'Université de Lorraine, Metz
Emeline SADOULET-REBOUL	Encadrante de thèse	Maître de conférences à l'Université de Franche-Comté, Besançon

Most of our progress has been built on the basis of failure rather than success

Remerciements

Cette thèse est le fruit d'un travail qui a duré pas loin de 5 années. Durant ces années, on apprend à être patient, persévérant et rigoureux. Je souhaite partager la réussite de cette thèse avec plusieurs personnes qui ont été impliquées de près ou de loin.

M. Bouhaddi, le directeur de cette thèse que je connais depuis la deuxième année de licence a été mon guide scientifique et a su me donner au bon moment une liberté de travail, synonyme d'une confiance non négligeable. Je dois un grand merci aussi à mes encadrants, M. Ouisse et Mme Sadoulet-Reboul avec qui la collaboration a particulièrement bien fonctionné ces dernières années. Je souligne leur niveau d'exigence qui a permis l'aboutissement d'un travail très rigoureux. Les échanges scientifiques ces dernières années étaient animés et le partage des idées se faisait avec un grand intérêt. J'ai beaucoup apprécié les moments de débats autour d'une table ou quand je défendais mes idées sur un tableau ou devant un PC.

Des débats, on en fait aussi avec les collègues. Que se soit les collègues du bureau 44H (par ordre d'arrivée, Petr, Aurélien, Hung, Sid, Alexandre, Florian, Agathe, Hamza, Huibin et Pauline) ou les collègues du thème COROM (Scott, Guillaume, Thomas, Daniel, Taub, Antoine K., Titouan, Eric, Gaël, Jimmy Cluster). Je salue particulièrement les deux seules doctorantes du labo à l'heure actuelle Agathe et Pauline avec qui les échanges étaient particulièrement passionnants. Le temps passé avec les collègues ne se limite pas aux heures de travail, les apéros en terrasse pour ne citer que ça sont des moments inoubliables. Outre les collègues du 44H et du thème COROM, je tiens à saluer Virginie, Antoine V., Yanxia, Xavier, Damien, Mathieu, Thibault, Flavianal, Emile, Anne, Momo, Belgacem, Ousseynou, Mylène, Luciano, Omar, Thierry, Jie et tant d'autres.

En dehors du labo, plusieurs personnes ont participé à la réussite de cette thèse. Si je suis là aujourd'hui c'est grâce aux membres de ma famille. Ils m'ont appris à être persévérant et m'ont apporté un soutien fort et continu. Je cite particulièrement mon père qui est pour moi un exemple de sagesse et de patience, mon frère qui depuis des années joue un rôle très important à mes côtés depuis Paris, ma mère et ma sœur qui m'ont comblé de tendresse. Je cite aussi ma tante Sœur Etienne, mon guide spirituel dont les paroles ont éclairci mon chemin. Je cite

également mes oncles et tantes ainsi que leurs familles et je souhaite remercier en particulier Fahed, Jabbour, Georgette et Mimi qui ont été présents et à mon écoute pendant toute cette période. En parlant de famille, je salue M. Nabil Ibrahim qui est membre de la famille depuis longtemps et qui a toujours pris le soin de me suivre et de m'orienter dans mon cursus.

A mon arrivée en France, j'ai eu la chance d'avoir une famille d'accueil. La famille Ghannimé, et spécialement tonton Antoine et sa famille ont toujours été à mes côtés. Les paroles ne seront jamais assez suffisantes pour exprimer la reconnaissance que je leurs dois.

Une famille, on a pu en faire une à Besançon avec les compatriotes libanais mes frères. Je salue Housam, Hanane, Jean, Elsy, Joe et Emmanuelle qui resteront à jamais, les personnes avec qui j'ai partagé les meilleurs moments à Besançon.

Comment ne pas finir ces remerciements sans parler de la personne qui m'a tant inspiré mais avec qui je n'ai pas pu partager ce moment, ma grand mère Linda qui me manque tant, je lui dédie ce manuscrit.

Table des matières

Introduction	5
1 Vibrations des systèmes mécaniques	9
1.1 Généralités	9
1.2 Vibrations des structures élastiques	10
1.2.1 Mise en équations	10
1.2.2 Modes propres de vibration	12
1.2.3 Troncature modale	13
1.2.4 Calcul de la réponse	14
1.3 Vibrations non-linéaires	15
1.3.1 Non-linéarités géométriques	16
1.3.2 Non-linéarités matérielles	18
1.3.3 Non-linéarités de contact	18
1.4 Méthodes de résolution	18
1.4.1 Méthode de la balance harmonique	21
1.4.2 Intégration temporelle	27
1.4.3 Réduction de modèle	33
2 Non-linéarités géométriques : modélisation et réduction de modèles	47
2.1 Introduction	47
2.2 Plaques minces en grands déplacements	48
2.2.1 Formulation variationnelle	50
2.2.2 Discrétisation par la méthode des éléments finis	52
2.2.3 Résolution et expression de la matrice tangente	55

2.2.4	Réduction de modèles non-linéaires	57
2.2.5	Parallélisation	63
2.2.6	Indicateurs temporels	67
2.2.7	Application	70
2.3	Non-linéarités localisées	76
2.3.1	Formulation discrète	76
2.3.2	Réduction de modèle	77
2.3.3	Approximation par enrichissement de résidus statiques	78
2.3.4	Applications	79
2.4	Conclusion	85
3	Réduction de modèles en vibroacoustique non-linéaire	87
3.1	Introduction	87
3.2	Formulations théoriques et état de l'art	88
3.2.1	Mise en équation	88
3.2.2	Formulation variationnelle	90
3.2.3	Ecriture matricielle et problème aux valeurs propres	91
3.2.4	Réduction de modèle	94
3.2.5	Réduction de modèle non-linéaire	96
3.2.6	Conclusion	97
3.3	Une nouvelle approche pour la synthèse modale de problèmes vibroacoustiques linéaires	97
3.3.1	Une variante de la méthode des approximations combinées	98
3.3.2	Application	99
3.4	Extension au problème couplé non-linéaire	105
3.4.1	Formulation théorique du problème couplé non-linéaire	105
3.4.2	Réduction de modèle couplé non-linéaire	107
3.5	Applications	112
3.5.1	Indicateurs vibroacoustiques	112
3.5.2	Non-linéarités localisées : cavité suspendue portant une masse	113
3.5.3	Non-linéarités réparties : cavité en contact avec une plaque mince	117

3.6	Conclusion	121
4	Acoustique et vibroacoustique non-linéaires : application aux hauts niveaux de pression	123
4.1	Introduction	123
4.2	Mise en équation : acoustique non-linéaire	124
4.2.1	Equation de Kuznetsov	125
4.2.2	Equation de Westervelt	126
4.3	Formulation du problème couplé fluide-structure non-linéaire	129
4.3.1	Formulation variationnelle du problème acoustique non-linéaire .	129
4.3.2	Ecriture matricielle	130
4.3.3	Résolution par continuation – matrice tangente	131
4.3.4	Problème couplé non-linéaire	132
4.4	Réduction de modèle	132
4.4.1	Base de réduction structurale	133
4.4.2	Base de réduction fluide	133
4.5	Application	134
4.6	Conclusion	136
	Conclusion	139
	Bibliographie	141
A	Eléments d’algèbre matricielle	155
A.1	Décomposition en valeurs singulières	155
A.2	Inversion des matrices singulières	156
A.2.1	Filtrage des modes de corps rigides	157
A.2.2	Décalage spectral	157
B	Expression de la matrice tangente des plaques en grands déplacements	159

Introduction

L'étude du comportement vibroacoustique d'une structure en présence de non-linéarités est un problème complexe pour deux raisons principales. D'une part, la problématique vibroacoustique nécessite de considérer la structure dans son milieu fluide et donc de prendre en compte les interactions se créant entre le fluide et la structure. D'autre part, l'existence de non-linéarités constitue une difficulté supplémentaire : ces non-linéarités peuvent avoir une origine structurale se traduisant notamment par des grandes amplitudes de vibration, ou acoustique lorsque les niveaux de pression acoustique sont importants. Une technique classique de résolution de ce problème est la méthode des éléments finis. Son principal inconvénient est son coût en termes de mémoire informatique et en temps de calcul suite à la discrétisation du domaine spatial en plusieurs éléments finis générant ainsi des matrices de grandes tailles. De plus, le comportement non-linéaire nécessite une évaluation de la force non-linéaire à chaque itération, rendant le problème encore plus coûteux en temps de calcul. Afin de diminuer ce coût de calcul, la réduction de modèle par des bases de réduction est une alternative à la résolution du système complet. Dans ce contexte, l'objectif de ce travail de thèse est la construction de bases de réduction adaptées au problème traité.

Le manuscrit est décomposé en quatre grands chapitres :

- le premier chapitre présente un état de l'art qui permet de positionner le travail effectué. Le problème de l'élasto-dynamique est présenté en premier lieu, suivi d'un rappel sur les techniques de réduction de modèles. Une généralisation du problème linéaire au problème non-linéaire est présentée. Les méthodes de résolution dans les domaines fréquentiel et temporel sont introduites par la suite ainsi que les méthodes de réduction qui peuvent leur être associées. La méthode des ap-

proximations combinées est la méthode de réduction adoptée dans ce travail. Elle a été initialement développée pour des études d'optimisation et de robustesse par réanalyse approchée. Elle consiste à enrichir la base modale du problème linéaire par une sous-base issue d'un développement en série de Taylor d'une fonction décrivant la perturbation du problème par rapport au problème initial.

- Le deuxième chapitre traite le problème des structures vibrantes ayant un comportement non-linéaire géométrique. Cette non-linéarité conduit à introduire dans les équations une fonction non-linéaire qui dépend du déplacement de la structure. Cette étude porte sur les non-linéarités géométriques localisées et réparties en grands déplacements. Les non-linéarités localisées se rencontrent dans tout type de liaison non-linéaire, et les non-linéarités réparties en grands déplacements sont caractéristiques des structures minces. La formulation par la méthode des éléments finis de ces deux problèmes est rappelée afin de pouvoir justifier le choix des modèles réduits proposés. Le modèle réduit dédié aux non-linéarités localisées est issu de la base modale du problème linéaire enrichie par la contribution statique de la liaison non-linéaire à la réponse de la structure. Le caractère réparti de la non-linéarité en grands déplacements ne permet pas d'appliquer la technique d'enrichissement par résidus statiques. Une autre méthode proposée est de procéder par réanalyse approchée en estimant à chaque itération une base de réduction qui prend en compte l'évolution du comportement non-linéaire à travers la méthode des approximations combinées. Pour rendre plus efficace la méthode de réduction, deux stratégies sont introduites au cours de la résolution : l'évaluation de la force non-linéaire élément par élément s'effectue à travers un algorithme parallèle et la base de réduction est actualisée s'il y a besoin en suivant un critère qui décrit l'évolution de l'énergie cinétique. L'intérêt de ces techniques est montré à travers des applications dans le domaine temporel.
- Le troisième chapitre reprend les méthodes décrites dans le deuxième chapitre afin de les étendre au problème vibroacoustique. Dans un premier temps, un état de l'art sur les méthodes de réduction des problèmes couplés est présenté. Par la suite, une nouvelle approche de synthèse modale du problème linéaire couplé, à travers la méthode des approximations combinées, est proposée. Le problème

couplé est étudié dans un contexte non-linéaire avec les types de non-linéarités évoqués précédemment. La méthode des approximations combinées et la méthode des résidus statiques sont adaptées au problème en les enrichissant par les modes du fluide découplé et par la contribution du couplage. L'intérêt des méthodes de réduction proposées est illustré à travers des applications dans le domaine temporel.

- Le dernier chapitre traite le problème d'acoustique et de vibroacoustique en présence de très hauts niveaux de pression. Deux formulations du problème basées sur l'hypothèse de petites fluctuations de pression devant la pression statique sont présentées : la formulation de Westervelt en pression et la formulation de Kuznetsov en potentiel de vitesse. Le choix de modélisation a porté sur l'équation de Kuznetsov qui présente des hypothèses plus convaincantes que celles de Westervelt. A travers des applications dans le domaine temporel, une comparaison entre les modèles linéaire et non-linéaire permet d'illustrer les performances de la méthode de réduction proposée.

Une conclusion générale termine ce mémoire ainsi qu'une présentation des perspectives mettant en évidence les aspects relatifs à la poursuite de ces travaux ainsi que les problèmes ouverts.

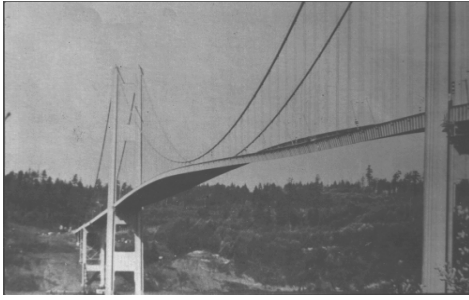
Chapitre 1

Vibrations des systèmes mécaniques

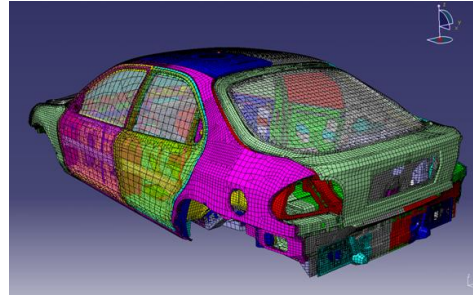
1.1 Généralités

On appelle vibration, tout mouvement autour d'une position d'équilibre. Ce phénomène englobe des multitudes d'applications allant des plus basiques jusqu'aux applications industrielles très complexes (figure 1.1). Par exemple, on entend grâce aux vibrations du tympan et on parle grâce aux vibrations des cordes vocales ; un moteur tournant engendre des excitations vibratoires et l'objet qui se heurte à un vent se met à vibrer. Ainsi les vibrations sont créées lorsque l'énergie cinétique du système n'est plus négligeable devant l'énergie de déformation, et le système se met à osciller autour de sa position d'équilibre. L'ouvrage historique de référence sur la théorie des vibrations est associé aux travaux de Lord Rayleigh publiés dans '*The theory of sound*' [108] bien qu'il ne soit pas le premier à étudier ce phénomène.

Les premières applications industrielles furent dans le domaine aéronautique où pour des raisons de sécurité et de fiabilité les ingénieurs sont tenus de maîtriser les problèmes des vibrations et de la dynamique des structures. Les moyens de calcul de l'époque limitaient les applications à des approches analytiques et à des modèles à faible nombre de degrés de liberté. La révolution informatique et l'apparition de la méthode des éléments finis ont permis d'élaborer de nouvelles méthodes permettant d'approfondir le calcul dans le but d'obtenir des modèles de prédiction fiables vis-à-vis des comportements vibratoires réels. Cette révolution a aussi permis aux méthodes



(a) Pont en résonance



(b) Modèle éléments finis d'une caisse de voiture pour une analyse modale

Figure 1.1 – Exemple de structures soumises à des vibrations.

d'identification expérimentale d'être plus élaborées, ainsi beaucoup d'applications impliquent une interaction entre les modèles numériques et les modèles expérimentaux. L'étude des vibrations est devenue une procédure standard dans la conception et le développement de la plupart des systèmes d'ingénierie.

Différents ouvrages décrivent les méthodes utilisées pour déterminer le comportement vibratoire, on peut citer celui de Géraudin et Rixen [34] qui est considéré comme la référence des ouvrages francophones sur la théorie des vibrations. D'autres ouvrages peuvent être cités comme [29, 41, 106].

1.2 Vibrations des structures élastiques

Cette partie rappelle la formulation du problème d'élastodynamique. L'écriture des équations sous forme variationnelle en termes de déplacements, permet d'explicitier le système sous forme discrète. A travers cette forme discrète, on rappelle les notions de base de la théorie des vibrations. Une présentation détaillée des méthodes variationnelles en élastodynamique peut être trouvée dans les ouvrages [28, 32, 107].

1.2.1 Mise en équations

On considère un domaine Ω borné occupé par une structure en équilibre. Cette structure est fixée sur une partie Σ de sa frontière et soumise à des forces surfaciques $F(t)$. On désigne par M un point du domaine Ω ; $\vec{u}(M, t)$ est le déplacement de ce point

à un instant t et \vec{n} la normale sur la frontière $\partial\Omega$. On se place dans l'hypothèse des petites perturbations. \vec{u} vérifie le problème aux limites suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \operatorname{div} \bar{\sigma} - \rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = 0 & \text{sur } \Omega, \end{array} \right. \quad (1.1a)$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \bar{\sigma} \vec{n} = \vec{F} & \text{sur } \partial\Omega \setminus \Sigma, \end{array} \right. \quad (1.1b)$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \vec{u} = 0 & \text{sur } \Sigma, \end{array} \right. \quad (1.1c)$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \bar{\sigma} = D^e : \bar{\varepsilon} & \text{sur } \Omega. \end{array} \right. \quad (1.1d)$$

L'équation (1.1a) représente l'équation de l'élastodynamique des milieux continus où ρ désigne la masse volumique de la structure et $\bar{\sigma}$ le tenseur des contraintes de Cauchy ; l'équation (1.1b) décrit les conditions aux limites en termes de contraintes ; l'équation (1.1c) décrit les conditions aux limites en termes de déplacements et l'équation (1.1d) décrit la loi de comportement du matériau où D^e désigne le tenseur d'ordre 4 des constantes élastiques et $\bar{\varepsilon}$ le tenseur des déformations élastiques.

En introduisant l'espace \mathcal{C} des fonctions $\vec{v}(M)$ régulières, cinématiquement admissibles, et l'espace $\mathcal{C}^0 \subset \mathcal{C}$ des \vec{v} nuls sur Σ , la formulation variationnelle s'énonce alors :

Trouver $\vec{u} \in \mathcal{C}^0$, tel que $\forall \vec{v} \in \mathcal{C}^0$, on a :

$$\int_{\Omega} \bar{\sigma}(\vec{u}) : \bar{\varepsilon}(\vec{v}) dV + \int_{\Omega} \rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} \vec{v} dV = \int_{\partial\Omega \setminus \Sigma} \vec{F} \vec{v} dS. \quad (1.2)$$

La résolution directe de l'équation (1.2) est souvent très complexe. Une manière pour contourner ce problème est de chercher une solution approchée en utilisant la méthode de Ritz-Galerkin qui consiste à projeter la solution \vec{u} dans un sous espace de dimension N . Cela conduit à la résolution d'un système d'équations différentielles couplées de taille N . Les matrices identifiées sont définies comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \int_{\Omega} \bar{\sigma}(\vec{u}) : \bar{\varepsilon}(\vec{v}) dV & \implies V^T K U, \end{array} \right. \quad (1.3a)$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \int_{\Omega} \rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} \vec{v} dV & \implies V^T M \ddot{U}, \end{array} \right. \quad (1.3b)$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \int_{\partial\Omega \setminus \Sigma} \vec{F} \vec{v} dS & \implies V^T F. \end{array} \right. \quad (1.3c)$$

Le système matriciel s'écrit alors sous la forme :

$$V^T M \ddot{U} + V^T K U = V^T F \quad \forall V, \quad (1.4)$$

soit :

$$M \ddot{U} + K U = F. \quad (1.5)$$

L'équation (1.5) est une équation différentielle du second ordre avec second membre, elle décrit l'équilibre dynamique du système discret. On appelle K la matrice de raideur, M la matrice de masse et F le vecteur de force. U et V sont les formes discrètes des vecteurs \vec{u} et \vec{v} . Dans le cas de la méthode des éléments finis, K est généralement symétrique semi-définie positive et M est généralement symétrique définie positive.

1.2.2 Modes propres de vibration

Si on considère l'équation (1.5) sans second membre ($F(t) = 0$), elle admet une solution particulière de la forme :

$$U(t) = \varphi q(t), \quad (1.6)$$

où φ est un vecteur représentant la forme propre du mouvement et $q(t)$ un scalaire.

Ainsi pour $q(t) \neq 0$:

$$K \varphi = - \frac{\ddot{q}(t)}{q(t)} M \varphi. \quad (1.7)$$

A partir de cette équation et d'après les conditions sur M et K , on constate que le rapport $-\frac{\ddot{q}(t)}{q(t)}$ est une constante positive. Soit λ cette constante, en posant $\lambda = \omega^2$ on obtient un système d'équations linéaires homogène qui s'écrit sous la forme :

$$(K - \omega^2 M) \varphi = 0. \quad (1.8)$$

Ce problème de degré N admet N racines ω^2 vérifiant le problème aux valeurs propres :

$$\det |K - \omega^2 M| = 0. \quad (1.9)$$

A chaque racine ω_i^2 , est associé un vecteur propre φ_i . L'ensemble de ces vecteurs forme une base Φ appelée base modale qui a la propriété d'être orthogonale au sens matriciel

par rapport à K et M . Différents algorithmes existent pour la résolution du problème aux valeurs propres, on peut trouver une description de ces méthodes dans [19, 98] par exemple. D'après le principe de superposition modale, la réponse $U(t)$ s'écrit en sommant les vecteurs propres projetés sur les coordonnées généralisées :

$$U(t) = \sum_{i=1}^N \varphi_i q_i(t) = \Phi q(t), \quad (1.10)$$

Si les vecteurs propres sont normalisés par rapport à la masse ($\varphi_i^T M \varphi_i = 1$), alors $\varphi_i^T K \varphi_i = \omega_i^2$ et l'équation (1.5) devient :

$$[I]\ddot{q}(t) + [\Lambda]q(t) = \Phi^T F(t), \quad (1.11)$$

avec $[I]$ la matrice d'identité et $[\Lambda]$ la matrice spectrale telle que :

$$[\Lambda] = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \omega_i^2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \omega_N^2 \end{bmatrix}. \quad (1.12)$$

Le système d'équations (1.11), contrairement au système d'équations (1.5) est un système découplé. Le principe de superposition modale permet ainsi une résolution de chaque équation du système indépendamment des autres.

1.2.3 Troncature modale

Un modèle éléments finis possède en général des milliers voire des millions de degrés de liberté. Il est pratiquement impossible de calculer les N modes propres associés. La structure répond souvent sur une certaine bande fréquentielle bien déterminée ; il est alors possible de faire une approximation en ne faisant intervenir que les modes appartenant à la bande d'intérêt et les modes voisins (souvent $2 \times \text{bande fréquentielle d'intérêt}$). Ainsi :

$$U(t) \approx \sum_{i=1}^p \varphi_i q_i(t) = T q(t). \quad (1.13)$$

T est la base modale tronquée à p modes, où $p \ll N$.

1.2.4 Calcul de la réponse

On s'intéresse à présent à la réponse d'un système oscillant amorti. Le problème est alors régi par l'équation :

$$M\ddot{U}(t) + B\dot{U}(t) + KU(t) = F(t), \quad (1.14)$$

où B désigne la matrice d'amortissement visqueux symétrique. On s'intéresse ici aux systèmes faiblement amortis, ceci permet de considérer l'hypothèse de Basile où B s'écrit sous la forme $B = \alpha K + \beta M$, avec α et β des réels positifs. En appliquant le principe de superposition modale (1.10), cette hypothèse permet d'obtenir une matrice $[\beta]$ diagonale et on se retrouve comme dans l'équation (1.11) avec un système d'équations découplées sous la forme :

$$[I]\ddot{q}(t) + [\beta]\dot{q}(t) + [\Lambda]q(t) = \Phi^T F(t), \quad (1.15)$$

avec $[\beta] = \Phi^T B \Phi$ la matrice d'amortissement généralisé qui s'écrit aussi en fonction des pulsations propres ω_i et des coefficients d'amortissement modaux $\xi_i = \frac{\beta_i}{2\omega_i}$:

$$[\beta] = \begin{bmatrix} 2\xi_1\omega_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 2\xi_i\omega_i & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 2\xi_N\omega_N \end{bmatrix}. \quad (1.16)$$

La résolution des équations (1.14) et (1.15) dépend de la nature de l'excitation $F(t)$.

Pour une excitation quelconque où le régime transitoire est étudié, la résolution s'effectue dans le domaine temporel par intégration temporelle [33]. Les algorithmes d'intégration temporelle se classent en deux catégories : implicite et explicite. Le choix de l'un ou de l'autre dépend de la nature de $F(t)$ et des caractéristiques de la structure. Les schémas d'intégration explicite sont généralement conditionnellement stables ; le pas de temps doit être suffisamment petit pour assurer la stabilité de l'intégration temporelle. Certains algorithmes implicites ont la propriété d'être inconditionnellement stables ; cela permet d'utiliser un pas de temps plus grand.

Lorsque $F(t)$ est harmonique ($\omega \mapsto F(\omega) = \tilde{F}e^{j\omega t}$) et que l'on ne s'intéresse qu'au régime permanent, la réponse harmonique se met sous la forme $U(\omega) = \tilde{U}e^{j\omega t}$ et :

$$\tilde{U}(\omega) = \sum_{i=1}^p \frac{\varphi_i \varphi_i^T \tilde{F}}{-\omega^2 + 2j\omega_i \xi_i \omega + \omega_i^2}. \quad (1.17)$$

Ainsi, un rappel sur les notions globales des vibrations linéaires pour les systèmes mécaniques a été présenté. Les hypothèses de petites oscillations et de faibles dissipations ont conduit à des équations différentielles linéaires du second ordre. Le principe de superposition modale a permis la simplification du système d'équations en le ramenant à une suite d'équations indépendantes les unes des autres. Il est rare d'avoir un système entièrement linéaire et plus la structure est complexe, plus il y a des chances de s'éloigner du domaine linéaire. La prise en compte des phénomènes non-linéaires est donc essentielle. Dans la suite, un rappel des notions générales en vibrations non-linéaires est présenté.

1.3 Vibrations non-linéaires

Les phénomènes non-linéaires sont choses courantes et le comportement linéaire est en quelque sorte une exception. Toutefois, le caractère potentiellement imprévisible d'un système non-linéaire peut amener à une défaillance catastrophique. En génie civil, lors d'événements sportifs et de concerts, les gradins peuvent être sujets à des oscillations non-linéaires dues au relâchement des articulations et au mouvement de la foule ; dans l'industrie aéronautique, les mouvements non linéaires peuvent avoir de graves conséquences sur la durée de vie des pièces et dans l'industrie automobile, le système de freinage et le système de suspension du moteur ont un comportement fortement non-linéaire. Les ingénieurs de tous les domaines sont confrontés à des systèmes non-linéaires à un moment donné de leurs vies professionnelles et devraient être en mesure de les reconnaître. Du moment où une des hypothèses de linéarisation n'est plus valable, le système d'équations différentielles n'est plus linéaire et l'application de la superposition modale n'est plus possible. En dynamique des structures, les sources typiques de non-linéarités sont de natures locales ou globales ; elles dépendent du comportement du matériau, de la nature des déformations ou des conditions aux limites

[128]. Les différents types de non-linéarités sont présentés par la suite.

1.3.1 Non-linéarités géométriques

C'est une source de non-linéarité qui résulte de l'énergie de déformation de la structure. Elle est de nature globale ou locale. Dans les deux cas, la contribution non-linéaire est en lien direct avec le déplacement de la structure ; plus le déplacement est important, plus le phénomène non-linéaire est marqué.

Non-linéarités globales

Ce type de non-linéarité se rencontre souvent dans des structures élancées de faible épaisseur. Soit le domaine Ω représenté sur la figure 1.2, occupé par la structure à l'état initial. On désigne par x_i , ($i = 1, 2, 3$) les coordonnées du point M dans le repère fixe \mathfrak{R} et on cherche à exprimer la déformation en ce point en se rapportant à la configuration de référence (point de vue lagrangien). On désigne par N un deuxième point proche de M de coordonnée $x_i + dx_i$, avec dx_i infinitésimal et $\|\overrightarrow{MN}\| = dl_0$. Après déformation, le point M se déplace de \vec{u} et se retrouve en M' de coordonnée $x_i + u_i$. N se retrouve alors en $N'(x_i + u_i + d(x_i + u_i))$ et $\|\overrightarrow{M'N'}\| = dl$. Le théorème de Pythagore généralisé permet de démontrer que :

$$\left\{ \begin{array}{l} dl_0^2 = \sum_i dx_i dx_i, \end{array} \right. \quad (1.18a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} dl^2 = \sum_i d(x_i + u_i) d(x_i + u_i). \end{array} \right. \quad (1.18b)$$

En tenant compte du fait que $du_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_j$ peut exprimer l'accroissement de la longueur du segment $[MN]$ à l'aide du tenseur de déformation de Green $\bar{\varepsilon}$, on obtient :

$$dl^2 - dl_0^2 = 2\varepsilon_{ij} dx_i dx_j, \quad (1.19)$$

avec :

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\nabla u + \nabla u^T + \nabla u \nabla u^T). \quad (1.20)$$

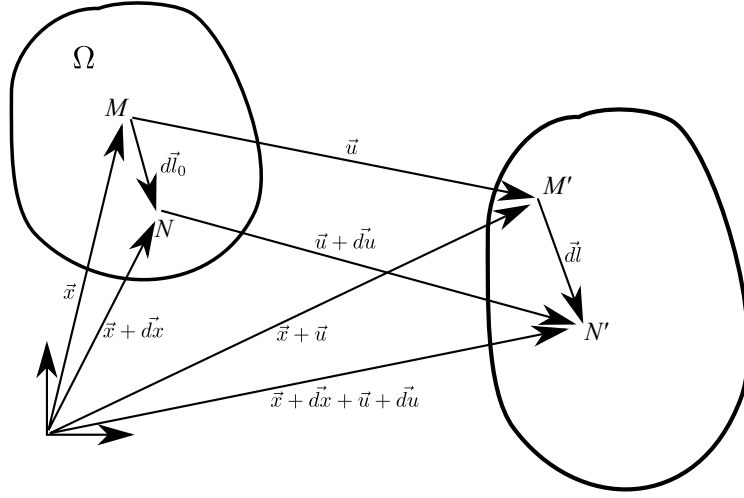


Figure 1.2 – État de déformation - Non-linéarité géométrique

Les phénomènes non-linéaires géométriques apparaissent du moment où le terme $\nabla u \nabla u^T$ n'est plus négligeable et on parle ainsi de grandes déformations. Un cas particulier qui se produit souvent avec les structures minces est le cas des grands déplacements où les déformations planes ou axiales (plaque/poutre) sont petites devant les rotations.

Non-linéarités locales

Les non-linéarités sont dites locales lorsqu'elles apparaissent en des points particuliers de la structure. L'oscillateur de Duffing à un degré de liberté illustre ce type de non-linéarité ; il vérifie l'équation de mouvement (1.21), où k_{nl} est la raideur non-linéaire. Elle peut être négative ayant un comportement adoucissant ou positive ayant un comportement rigidifiant.

$$m\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + kx(t) + k_{nl}x^3(t) = f(t) \quad (1.21)$$

La figure 1.3 représente la réponse de l'oscillateur de Duffing pour plusieurs valeurs de k_{nl} et pour plusieurs niveaux d'excitation harmonique. Cette figure montre l'importance de la contribution du terme k_{nl} , qui évolue avec le niveau d'excitation. A titre d'exemple, la figure 1.3c montre la contribution du terme k_{nl} sur les niveaux d'excitation où l'on remarque une évolution non proportionnelle de la réponse harmonique

par rapport à l'excitation. La figure 1.3d représente les diagrammes de phase (déplacement, vitesse) des différentes réponses de cet exemple où l'on distingue clairement l'apparition d'un deuxième harmonique à partir d'un certain niveau d'excitation. Le diagramme de phase est une courbe fermée traduisant le caractère périodique de la solution obtenue et la distortion observée lorsque le niveau d'excitation augmente est liée à l'apparition de ce deuxième harmonique.

1.3.2 Non-linéarités matérielles

Les phénomènes non-linéaires peuvent aussi être observés lorsque la loi de comportement du matériau n'est pas linéaire. L'exemple le plus simple est celui du comportement élasto-plastique où la loi de comportement $\bar{\sigma}(\bar{\varepsilon})$ n'est pas linéaire au-delà de la limite élastique (figure 1.4a). D'autres exemples peuvent être cités comme les matériaux visco-plastiques où la vitesse de déformation intervient dans la loi de comportement (figure 1.4b) conduisant à des effets dissipatifs [122].

1.3.3 Non-linéarités de contact

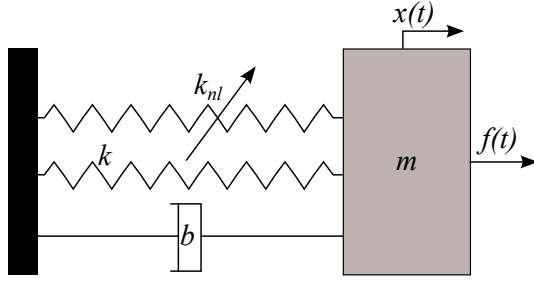
Une raideur non-linéaire permet de modéliser d'autres liaisons comme les liaisons de contact rencontrées au niveau des butées (figure 1.5). Le comportement non-linéaire peut être de nature dissipative en fonction de la vitesse. Les différents types de joints, la friction entre deux surfaces en contact (ex : frottement de Coulomb) ainsi que les contacts lubrifiés des machines tournantes ou des boîtes de vitesses sont caractérisés par ce comportement [103, 109].

1.4 Méthodes de résolution

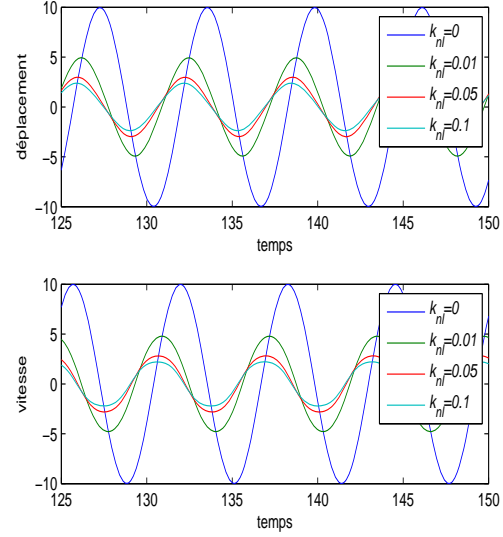
L'équation différentielle générale, régissant le comportement dynamique d'une structure non-linéaire est de la forme :

$$M\ddot{U}(t) + f_{nl}(\dot{U}, U, t) = F(t), \quad (1.22)$$

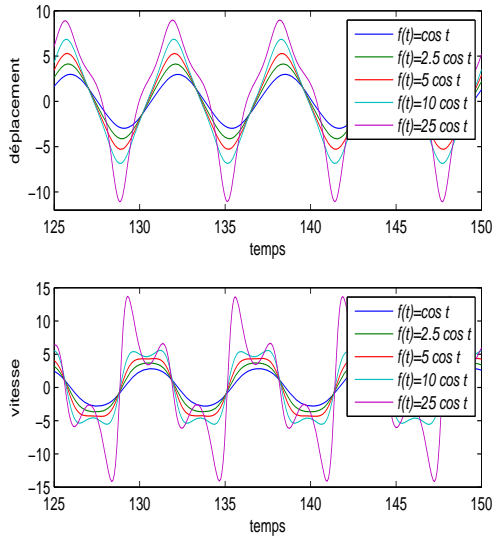
avec $f_{nl}(\dot{U}, U, t)$ la force non-linéaire dérivée de l'énergie de déformation ou de la dissipation. Contrairement au cas linéaire où les forces dérivées des énergies sont linéaires,



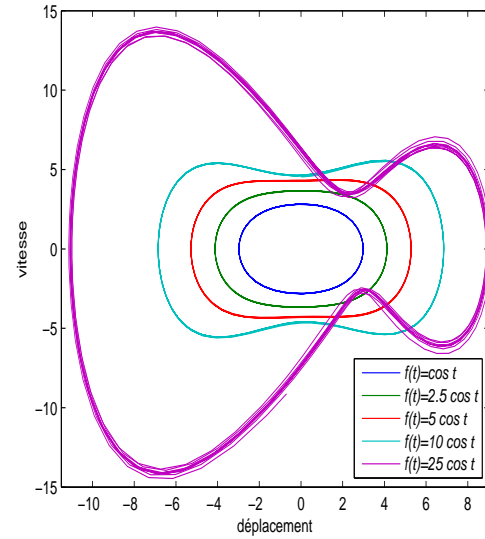
(a) Schéma d'un oscillateur de Duffing.



(b) Contribution du terme k_{nl} pour le même niveau d'excitation : réponse temporelle en déplacement et en vitesse, $f(t) = \cos(t)$.



(c) Contribution du terme k_{nl} pour plusieurs niveaux d'excitation : réponse temporelle en déplacement et en vitesse, $k_{nl} = 0.1$.



(d) Contribution du terme k_{nl} pour plusieurs niveaux d'excitation : diagramme de phase, $k_{nl} = 0.1$.

Figure 1.3 – Contribution du terme k_{nl} pour $k = m = 1$ et $b = 0.1$.

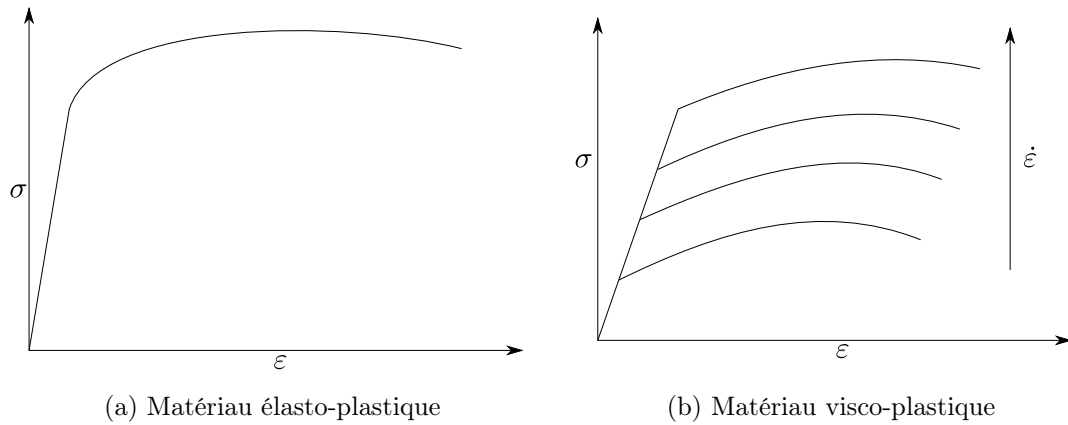


Figure 1.4 – Loi de comportement pour des matériaux non-linéaires.

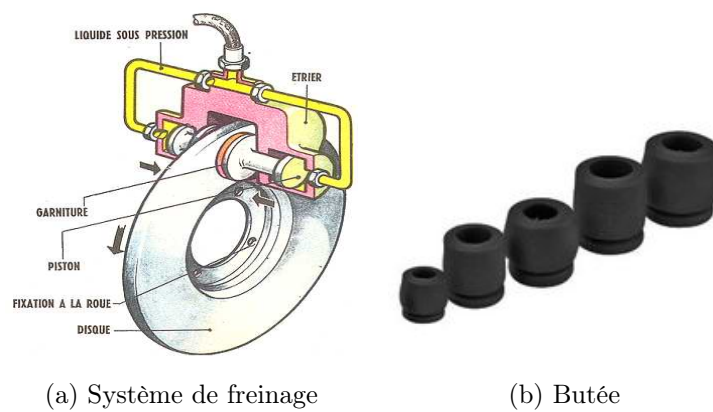


Figure 1.5 – Structures soumises à des non-linéarités de contact.

le cas non-linéaire engendre une force $f_{nl}(\dot{U}, U, t)$ non-linéaire. Cela rend la résolution de l'équation (1.22) plus compliquée que celle de l'équation (1.14). La méthode la plus générale consiste en une intégration des équations du mouvement. Dans le cas où l'excitation est harmonique, la méthode de la balance harmonique permet une résolution dans le domaine fréquentiel.

1.4.1 Méthode de la balance harmonique

Si $F(t)$ s'écrit dans le domaine spectral, la réponse $U(t)$ peut être écrite sous une forme périodique de série de Fourier [88] :

$$\left\{ \begin{array}{l} F(t) = \sum_{h=0}^{H-1} (F_h \cos h\omega t) \\ U(t) = \sum_{h=0}^{H-1} (U_h^c \cos h\omega t + U_h^s \sin h\omega t) . \end{array} \right. \quad (1.23a)$$

$$(1.23b)$$

Avec H le nombre d'harmoniques retenus. L'hypothèse sur H est basée sur la connaissance à priori de la nature de $U(t)$. Le plus souvent, les systèmes mécaniques réagissent à la 3^{ème}, voir la 5^{ème} harmonique. La méthode de la balance harmonique permet de traiter uniquement les réponses périodiques ou quasi-périodiques. Pour des réponses chaotiques, l'intégration temporelle demeure l'unique solution. Pour illustrer la méthode, on se place dans le cas de non-linéarités de raideurs. La non-linéarité se traduit par une matrice de raideur dépendant du déplacement. L'équation (1.22) devient :

$$M\ddot{U}(t) + B\dot{U}(t) + K(U, t)U(t) = F(t) \quad (1.24)$$

En injectant l'équation (1.23b) dans l'équation (1.24), et en isolant les contributions de chaque harmonique, on obtient un système algébrique non-linéaire de taille $2 \times H \times N$:

$$\begin{bmatrix} \ddots & & [0] & \dots \\ [0] & \begin{bmatrix} -(h\omega)^2 M + K(U) & h\omega B \\ -h\omega B & -(h\omega)^2 M + K(U) \end{bmatrix} & [0] \\ \vdots & & [0] & \ddots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \vdots \\ U_h^c \\ U_h^s \\ \vdots \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \vdots \\ F_h \\ 0 \\ \vdots \end{Bmatrix} . \quad (1.25)$$

Les méthodes de perturbations [87] souvent utilisées pour résoudre l'équation de Duffing ne sont pas adaptées à des problèmes de grande taille. Le but étant de suivre

l'évolution du comportement vibratoire en fonction de la pulsation ω , le problème (1.25) est amené à être résolu sous la forme :

$$R(U, \omega) = \bar{K}(U, \omega)U - F = 0. \quad (1.26)$$

R est une fonction non-linéaire, a priori régulière qui dépend du paramètre ω et de l'inconnue U . Le comportement non-linéaire engendre la possibilité d'avoir plusieurs solutions de U pour un ω donné. Les méthodes de continuation [35, 53, 96] ont été développées pour résoudre ce type d'équation. La résolution s'effectue itérativement en suivant un certain chemin qui rend la solution unique à une itération. En fonction du chemin suivi, ce type d'équation de taille $(2 \times H \times N)$ admet $(2 \times H \times N)$ ou $(2 \times H \times N + 1)$ inconnues. Les $(2 \times H \times N)$ inconnues sont les composantes de U et l'inconnue supplémentaire qui peut apparaître implicitement est ω . Si le chemin suivi est un chemin défini explicitement en fonction de ω (à titre d'exemple : discrétisation explicite du domaine ω via un $\Delta\omega$ défini a priori), l'équation admet $(2 \times H \times N)$ inconnues. Les méthodes de continuation sont classées en deux catégories : la méthode de continuation par prédiction-correction (PC) et la méthode asymptotique numérique (MAN).

Les méthodes de prédiction-correction (PC)

Le principe général de ces méthodes est de chercher une solution (U^i, ω^i) vérifiant le critère $(\|R^i\| < \epsilon)$ avec $(R(U^i, \omega^i) = R^i)$ [1]. (U^i, ω^i) est générée à partir de la solution précédente (U^{i-1}, ω^{i-1}) à travers une prédiction suivie d'une succession de corrections. Un paramètre (a) représentant l'abscisse curviligne de la courbe R est défini pour contrôler la direction du chemin, et la longueur de pas $(\Delta U, \Delta\omega)$ contrôle l'amplitude du chemin. Ainsi, la suite des solutions (U^i, ω^i) constitue une représentation discrète de la solution (U, ω) comprise dans une plage de variation donnée $[\omega_{min}, \omega_{max}]$.

En conséquence, les différentes méthodes de prédiction-correction se différencient par la nature de la prédiction-correction et par le choix du paramètre (a) et du contrôle de la longueur du chemin.

Le prédicteur-correcteur : On souhaite connaître l'état (U^i, ω^i) au voisinage de (U^{i-1}, ω^{i-1}) supposé connu. En développant l'équation (1.26) au voisinage de ce point on a :

$$R^i \approx R^{i-1} + \frac{\partial R^{i-1}}{\partial U}(U^i - U^{i-1}) + \frac{\partial R^{i-1}}{\partial \omega}(\omega^i - \omega^{i-1}) = 0. \quad (1.27)$$

On pose alors :

$$\begin{cases} \Delta U = U^i - U^{i-1} & (1.28a) \\ \Delta \omega = \omega^i - \omega^{i-1}. & (1.28b) \end{cases}$$

Les inconnues du problème sont $(\Delta U, \Delta \omega)$ et le système admet $(2 \times H \times N)$ équations à $(2 \times H \times N + 1)$ inconnues. Pour obtenir la solution recherchée du problème, une équation doit être ajoutée au système pour définir une loi sur (ΔU) , $(\Delta \omega)$ ou les deux. Il s'agit de l'équation de la paramétrisation.

Paramétrisation : Le choix de la paramétrisation impacte sur la nature du chemin pris lors de l'identification de la solution. C'est une loi qui lie le paramètre a aux pas incrémentaux $(\Delta U, \Delta \omega)$. La paramétrisation la plus simple est celle qui associe (a) à un $(\Delta \omega)$ qui sera fixe, ainsi les (ω^i) sont déterminés explicitement et le système (1.26) n'admet plus que $2 \times H \times N$ inconnues. On parle d'une continuation séquentielle et la résolution s'effectue pour chaque ω^i donné (figure 1.6) :

$$R^i = R^{i-1} + \frac{\partial R^{i-1}}{\partial U} \Delta U^i = 0. \quad (1.29)$$

Bien qu'elle soit simple à mettre en œuvre, cette méthode présente plusieurs limites numériques. En effet, le schéma séquentiel va échouer et la solution va typiquement diverger en présence d'un point tournant ou d'un point de bifurcation, deux cas sont souvent rencontrés en vibrations non-linéaires. La raison revient au jacobien $(\frac{\partial R^{i-1}}{\partial U})$ qui devient singulier en ces points.

Différentes stratégies existent pour contourner ce problème ; une solution courante consiste à associer l'équation liant (a) et $(\Delta U, \Delta \omega)$ à l'équation (1.26). Ainsi, on obtient un système de $(2 \times H \times N + 1)$ équations à $(2 \times H \times N + 1)$ inconnues. Les stratégies de paramétrisation les plus répandues sont les suivantes :

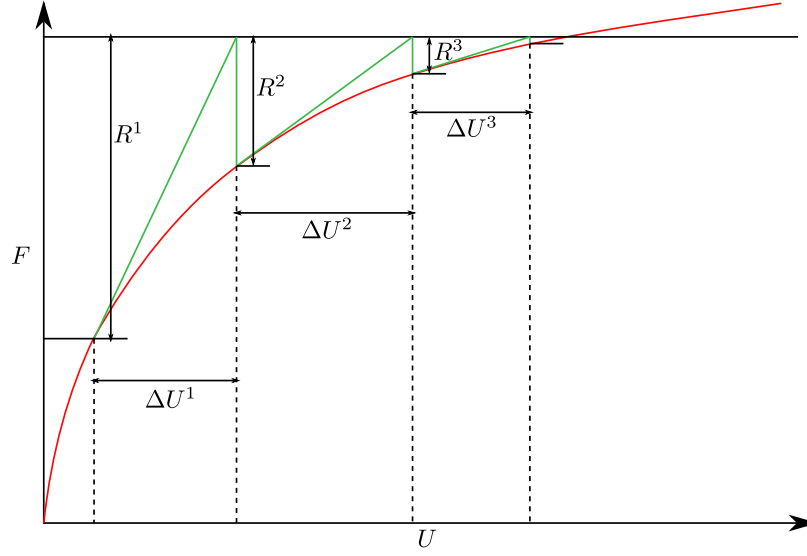


Figure 1.6 – Schéma de prédiction correction.

- **Paramétrisation par longueur d’arc** : L’idée est de paramétrer la courbe par son abscisse curviligne qui sera (a) et de chercher l’intersection du cercle d’origine (U^{i-1}, ω^{i-1}) et de rayon (a) avec la courbe $R(U, \omega)$ (figure 1.7a). La relation entre (a) et $(\Delta U, \Delta \omega)$ est la suivante :

$$a^2 = \|\Delta U\|^2 + \Delta \omega^2. \quad (1.30)$$

- **Paramétrisation par pseudo-longueur d’arc** : L’idée est toujours de paramétrer la courbe par son abscisse curviligne, mais la relation entre (a) et $(\Delta U, \Delta \omega)$ décrit cette fois la tangente (d) à la courbe $R(U, \omega)$ en (U^{i-1}, ω^{i-1}) (figure 1.7b). On cherche alors l’intersection entre $R(U, \omega)$ et la projection orthogonale de (d) passant par (a) sur $R(U, \omega)$.
- **Paramétrisation sélective** : Il s’agit d’une alternative à la continuation séquentielle décrite au-dessus. Cette méthode consiste à fixer une des composantes de U ou ω (figure 1.7c). Fixer une composante de U au point tournant permet d’éviter la divergence et de réussir la prédiction ou la correction. En effet sur la zone du point tournant, la variation en U est supérieure à celle en ω .

Toutes les méthodes citées précédemment contournent avec succès la problématique

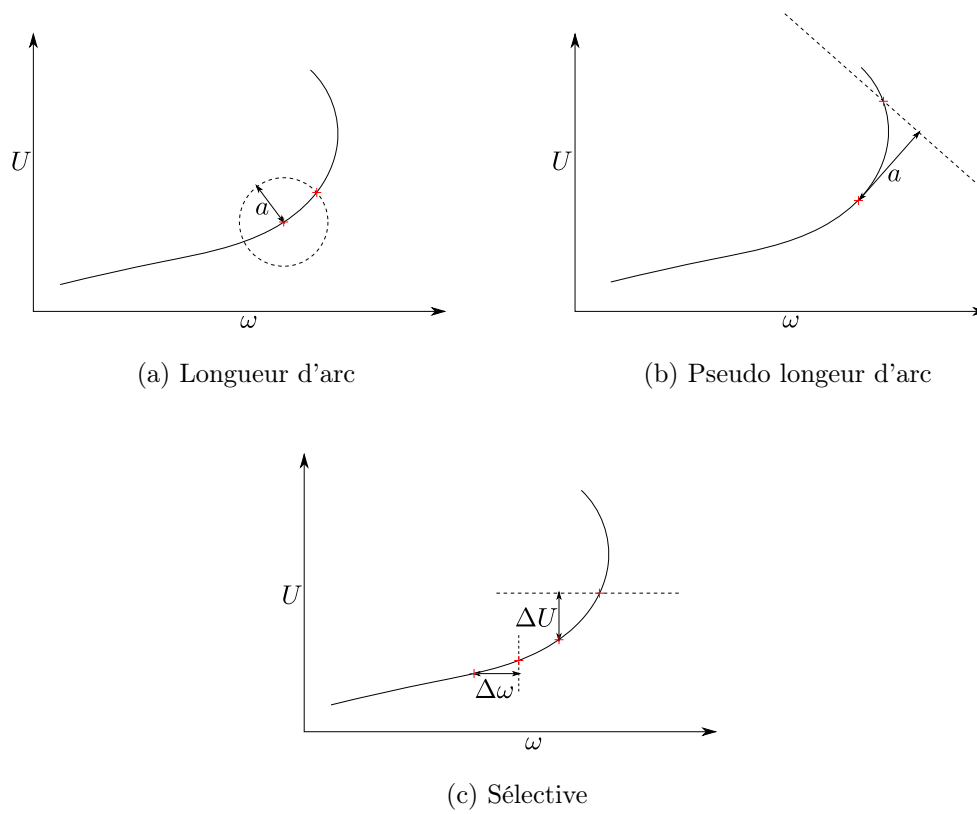


Figure 1.7 – Méthodes de paramétrisation.

du point tournant, mais il n'est pas certain qu'elles identifient le point bifurquant. Une alternative à cette stratégie d'identification est de ne plus chercher la solution discrète en chaque point (U^i, ω^i) mais plutôt de chercher à déterminer la courbe $R(U, \omega)$ sous forme d'une combinaison de plusieurs petites courbes (r) que l'on cherche à exprimer comme développement en série entière. La méthode asymptotique numérique utilise cette technique.

La méthode asymptotique numérique MAN

La MAN a été initialement développée pour résoudre les problèmes de flambement et post-flambement non-linéaires [27], par la suite elle a été généralisée à différents types de calculs de structures [23, 6]. Pour une description détaillée et illustrée de la MAN, le lecteur pourra se référer à [24]. Comme mentionné précédemment, l'idée de cette méthode n'est plus de générer une séquence de points pour reconstituer par discrétisation la courbe mais plutôt de générer une séquence de morceaux de la courbe. Chaque morceau est décrit sous forme continue par un développement en série entière par rapport au paramètre du chemin (figure 1.8). Cela rend la solution plus robuste au prix d'un coût de calcul supplémentaire. Des similitudes avec les méthodes citées précédemment existent, comme le calcul itératif du fait qu'il s'agit d'une méthode de continuation, ou le paramètre de chemin qui va décrire l'allure du morceau à calculer. Partant d'un point (U^{i-1}, ω^{i-1}) connu, on cherche à exprimer $(U(a))$ et $(\omega(a))$ sous forme d'une série entière tronquée à l'ordre t en fonction du paramètre du chemin (a) .

$$\begin{cases} U(a) = U^{i-1} + \sum_{k=1}^t a^k U_k, \\ \omega(a) = \omega^{i-1} + \sum_{k=1}^t a^k \omega_k. \end{cases} \quad (1.31)$$

$$\omega(a) = \omega^{i-1} + \sum_{k=1}^t a^k \omega_k. \quad (1.32)$$

L'introduction de ce système dans l'équation (1.26) se traduit par :

$$R(U(a), \omega(a)) = \sum_{k=1}^t a^k R_k = 0 \quad (1.33)$$

où, chaque ordre k est décrit par :

$$R_k = \frac{\partial R^{i-1}}{\partial U} U_k + \frac{\partial R^{i-1}}{\partial \omega} \omega_k - F_k^{nl} = 0, \quad (1.34)$$

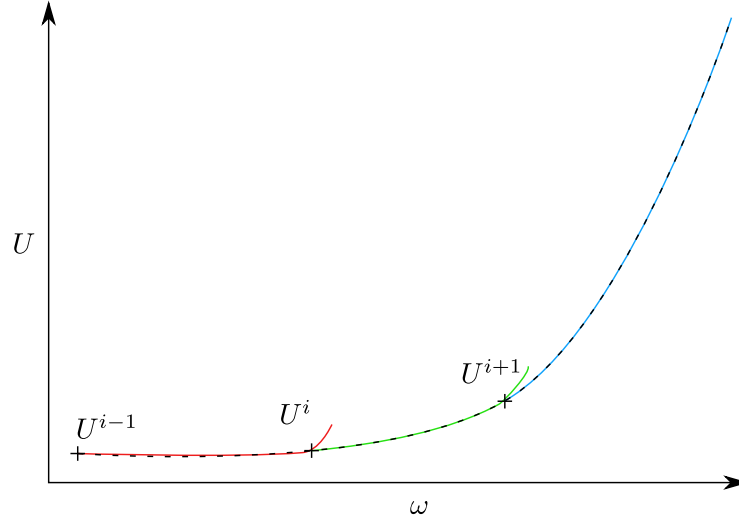


Figure 1.8 – Schéma de la MAN.

avec F_k^{nl} un terme de second ordre dépendant exclusivement des ordres précédents et qui est nul pour $k = 1$. Le système (1.26) passe à $(2 \times H \times N \times t)$ équations dans la MAN mais il reste sous-déterminé et l'introduction d'une équation sur le paramètre du chemin est nécessaire pour aboutir à la solution. Les relations définies dans les méthodes PC sont également utilisées pour la MAN, à une différence près : une seule matrice $(\frac{\partial R}{\partial U})$ est nécessaire pour le calcul.

1.4.2 Intégration temporelle

Dans le cas d'une excitation quelconque, l'utilisation des méthodes harmoniques n'est plus adéquate et la résolution de l'équation différentielle par intégration temporelle reste la démarche la plus adaptée à ce type de problème. L'intégration temporelle est un outil numérique qui permet de prédire l'état du système, sur un intervalle $[t_0, t_f]$ discrétisé en p instants t_i ($i = 1, \dots, p$), où t_0 et t_f désignent respectivement l'instant initial et l'instant final. A l'instant initial l'état du système est supposé connu, on cherche alors à calculer itérativement chaque état en fonction des paramètres du schéma, du pas de temps $\Delta t = t_i - t_{i-1}$ et des états pris en compte. L'équation générale (1.24) peut être ramenée à une équation différentielle du premier ordre ; cela revient donc à doubler la taille du système. Plusieurs algorithmes dédiés à la résolution temporelle des équations différentielles de premier ordre existent telles les méthodes à pas multiples, qui

permettent d'écrire le schéma d'intégration sous forme implicite ou explicite [31, 115]. La taille doublée des équations engendrée par le passage en équation différentielle de premier ordre pousse l'utilisateur à opter pour des schémas dédiés aux équations différentielles du second ordre. Le choix du type de schéma dépend souvent de la nature de la réponse et des propriétés de la structure étudiée.

Le schéma de Newmark

Le schéma de Newmark [90] est un schéma à un pas qui permet de résoudre les équations différentielles du second ordre. Le développement en série de Taylor de l'état $[U_i \dot{U}_i]^T$ tronqué à l'ordre 3 conduit à :

$$\begin{cases} U_i = U_{i-1} + \Delta t \dot{U}_{i-1} + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{U}_{i-1} + \frac{\Delta t^3}{6} \dddot{U}_{i-1}, \\ \dot{U}_i = \dot{U}_{i-1} + \Delta t \ddot{U}_{i-1} + \frac{\Delta t^2}{2} \dddot{U}_{i-1}. \end{cases} \quad (1.35)$$

Newmark a alors introduit les paramètres γ et β pour établir une nouvelle formulation :

$$\begin{cases} U_i = U_{i-1} + \Delta t \dot{U}_{i-1} + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{U}_{i-1} + \beta \Delta t^3 \ddot{U}_{i-1}, \\ \dot{U}_i = \dot{U}_{i-1} + \Delta t \ddot{U}_{i-1} + \gamma \Delta t^2 \ddot{U}_{i-1}. \end{cases} \quad (1.36a)$$

$$(1.36b)$$

L'accélération est supposée linéaire entre deux pas de temps :

$$\ddot{U}_{i-1} = \frac{\ddot{U}_i - \ddot{U}_{i-1}}{\Delta t}. \quad (1.37)$$

Ceci permet d'aboutir à l'équation d'état suivante :

$$\begin{cases} U_i = U_{i-1} + \Delta t \dot{U}_{i-1} + \Delta t^2 \left(\frac{1}{2} - \beta \right) \ddot{U}_{i-1} + \Delta t^2 \beta \ddot{U}_i, \\ \dot{U}_i = \dot{U}_{i-1} + (1 - \gamma) \Delta t \ddot{U}_{i-1} + \gamma \Delta t \ddot{U}_i. \end{cases} \quad (1.38a)$$

$$(1.38b)$$

En exprimant \ddot{U}_i en fonction de U_i dans l'équation (1.38a) et en intégrant ce résultat dans l'équation (1.38b) on obtient le nouveau système d'état :

$$\begin{cases} \dot{U}_i = \frac{\gamma}{\beta \Delta t} (U_i - U_{i-1}) + \left(1 - \frac{\gamma}{\beta}\right) \dot{U}_{i-1} + \left(1 - \frac{\gamma}{2\beta}\right) \Delta t \ddot{U}_{i-1}, \\ \ddot{U}_i = \frac{1}{\beta \Delta t^2} (U_i - U_{i-1}) - \frac{1}{\beta \Delta t} \dot{U}_{i-1} + \left(1 - \frac{1}{2\beta}\right) (\ddot{U}_{i-1}). \end{cases} \quad (1.39a)$$

$$(1.39b)$$

L'introduction des équations (1.39a) et (1.39b) dans l'équation du système dynamique (1.24) conduit à une nouvelle écriture équivalente à celle d'un problème quasi-statique, tel que :

$$\hat{K}(U_{i-1})\Delta U_i = \hat{f}, \quad (1.40)$$

où :

- \hat{K} est la matrice jacobienne ou matrice d'itération du système :

$$\hat{K} = K^t + \frac{\gamma}{\beta\Delta t}B + \frac{1}{\beta\Delta t^2}M. \quad (1.41)$$

- \hat{f} est le terme assimilé à une force dynamique instantanée :

$$\begin{aligned} \hat{f} = & F_i - F_{i-1} \\ & + \left(\frac{1}{\beta\Delta t}M + \frac{\gamma}{\beta}B \right) \dot{U}_{i-1} \\ & + \left(\frac{1}{2\beta}M + \left(\frac{\gamma}{2\beta} - 1 \right) \Delta t B \right) \ddot{U}_{i-1}. \end{aligned} \quad (1.42)$$

- ΔU_i est la variation du déplacement entre l'itération t_{i-1} et t_i :

$$\Delta U_i = U_i - U_{i-1}. \quad (1.43)$$

L'équation (1.40) est obtenue après approximation de la force non-linéaire inconnue à l'instant t_i sous la forme :

$$f_{nl}(U_i) = K(U_i)U_i = f_{nl}(U_{i-1}) + \frac{\partial f_{nl}}{\partial U}(U_i - U_{i-1}). \quad (1.44)$$

Le terme $\frac{\partial f_{nl}}{\partial U}$ décrit la variation de la force non-linéaire en fonction du déplacement ; sous forme discrète ce terme correspond à la matrice de raideur tangente K^t . L'approximation de la force non-linéaire utilisée dans l'équation (1.44) ne permet pas d'avoir une prédiction exacte en l'appliquant à l'équation (1.40). Une suite de corrections en k itérations est nécessaire pour assurer la convergence de l'état q_i^k , vis-à-vis de l'équilibre dynamique. Ceci s'effectue en minimisant la fonction résiduelle $r(U_i^k)$ telle que :

$$r(U_i^k) = M\ddot{U}_i^k + B\dot{U}_i^k + K(U_i^k)U_i^k - F_i = 0, \quad (1.45)$$

$r(U_i^k)$, inconnue est approximée aux voisinages de $r(U_i^{k-1})$:

$$r(U_i^k) = r(U_i^{k-1}) + \hat{K}(U_i^{k-1})(U_i^k - U_i^{k-1}). \quad (1.46)$$

Une fois ΔU_i^k déterminé, cela permet de calculer $\Delta \dot{U}_i^k$ et $\Delta \ddot{U}_i^k$ tels que :

$$\begin{cases} \Delta \dot{U}_i^k = \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \Delta U_i^k, \end{cases} \quad (1.47a)$$

$$\begin{cases} \Delta \ddot{U}_i^k = \frac{1}{\beta \Delta t^2} \Delta U_i^k. \end{cases} \quad (1.47b)$$

Le critère de convergence sur $r(U_i^k)$ peut varier selon le choix de l'utilisateur. Le plus utilisé est celui qui exige à $r(U_i^k)$ d'être inférieur à un seuil de précision et stable vis-à-vis de sa variation :

$$\begin{cases} \|r(U_i^k)\| < \epsilon_1 \|F_i\|, \end{cases} \quad (1.48a)$$

$$\begin{cases} \frac{\|r(U_i^k)\| - \|r(U_i^{k-1})\|}{\|r(U_i^k)\|} < \epsilon_2, \end{cases} \quad (1.48b)$$

où ϵ_1 et ϵ_2 désignent des scalaires relativement petits. Le schéma d'intégration temporelle de Newmark est résumé figure 1.9. A noter que ce schéma peut être écrit sous plusieurs formes ; dans [34], l'auteur propose de partir des équations (1.38a) (1.38b) en considérant que l'accélération \ddot{U}_i^0 est nulle. Cela évite le passage par l'équation (1.40) sans perte de précision. Dans [99], on retrouve la même procédure de prédiction avec d'autres critères de correction et de convergence. Dans cette étude, il a été constaté que les résultats obtenus ne sont pas affectés par le type de schéma utilisé.

Paramétrisation et étude de stabilité

Le schéma d'intégration présenté dépend naturellement des paramètres γ et β ainsi que du pas de temps fixé Δt . L'hypothèse d'une accélération linéaire dans l'équation (1.37) a impliqué des paramètres de schéma tels que $(\gamma = \frac{1}{2})$ et $(\beta = \frac{1}{6})$. Si on considère l'hypothèse d'accélération moyenne, les paramètres du schéma sont fixés tels que $(\gamma = \frac{1}{2})$ et $(\beta = \frac{1}{4})$. Le schéma par différences centrées engendre un paramètre β nul. L'étude de stabilité pour les systèmes linéaires [34] montre que ce schéma possède une stabilité inconditionnelle mais l'erreur de périodicité est supérieure à celle obtenue avec un schéma d'accélération linéaire ou un schéma aux différences centrées. Toutefois, l'étude de stabilité effectuée a priori pour les systèmes linéaires s'effectue à posteriori pour les systèmes non-linéaires [13, 44] à travers un bilan énergétique itératif. Des exemples numériques dans [45, 113] montrent le risque d'aboutir à des résultats faussés par l'instabilité du schéma. En restant au voisinage du comportement linéaire, ces problèmes sont rarement rencontrés.

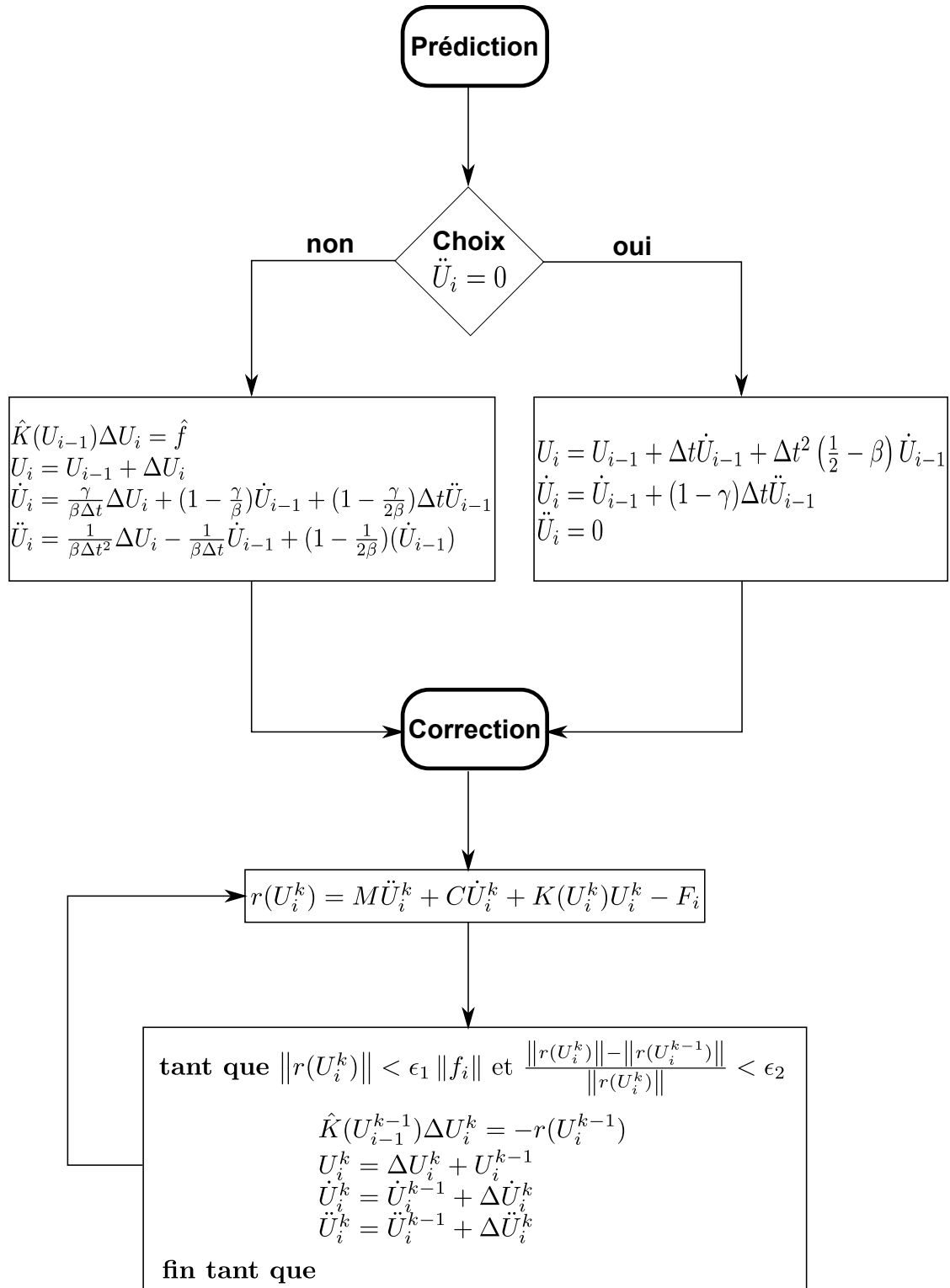


Figure 1.9 – Schéma de Newmark non-linéaire.

Le pas de temps utilisé dépend du spectre de l'excitation étudiée, il est souvent fixé telle que la fréquence maximale du spectre vaut le dixième du pas choisi, cela implique des pas de temps très petits pour des excitations large bande et un temps de calcul important. L'utilisation d'un pas de temps adaptatif est une alternative pour contourner le problème de stabilité et accélérer le temps de calcul.

Les différentes méthodes existantes font intervenir des critères basés sur le nombre de corrections effectuées ; l'estimation de l'erreur produite par le schéma d'intégration, ou même le calcul de la fréquence dominante en réponse. La plupart des méthodes proposées dans la littérature se basent sur la technique d'estimation d'erreur [18, 33, 46, 131] qui est établie en fonction du saut d'accélération. Ces méthodes se différencient dans le traitement de cette erreur et le conditionnement sur le pas de temps.

Outre le pas de temps et les paramètres du schéma qui influencent la stabilité de l'intégration temporelle, les modes parasites hautes fréquences, caractéristiques des modèles éléments finis, peuvent aussi dégrader la stabilité du schéma. La capacité d'introduire un certain degré d'amortissement numérique sur les modes supérieurs tout en ne modifiant pas la précision du schéma est donc recherchée. Hilbert, Hughes et Taylor [43] ont introduit l'amortissement à travers un paramètre α en définissant l'instant ($t_{i-\alpha} = t_i - \alpha(t_i - t_{i-1})$) ; l'équilibre dynamique est alors évalué pour $(U_{i-\alpha}, \dot{U}_i, \ddot{U}_i)$, cette méthode est connue sous le nom de la méthode α -HHT. Wood, Bossak et Zienkiewicz [127] ont proposé une méthode similaire en écrivant l'équilibre dynamique pour $(U_i, \dot{U}_i, \ddot{U}_{i-\alpha})$. Cette méthode est connue sous le nom de la méthode de α -WBZ. Pour réduire l'erreur introduite par l'amortissement numérique Chung et Hulbert [22] ont associé ces deux méthodes en définissant deux paramètres α_m et α_f , cette méthode connue sous la méthode α généralisé est la plus efficace en terme de précision et ne nécessite qu'un seul paramètre de réglage (rayon spectral de la matrice d'amplification dynamique). Modak [82] a comparé les différentes méthodes et propose une écriture unifiée pour ces schémas. La difficulté majeure avec ces méthodes réside dans le choix de la valeur des paramètres introduits, Bathe [10] propose un schéma ne nécessitant aucun rajout de paramètre mais qui nécessite en revanche de décomposer Δt en deux pas de temps, ainsi les états à l'instant t_i et $t_{i+\frac{\Delta t}{2}}$ sont nécessaires pour le schéma.

1.4.3 Réduction de modèle

Le paragraphe précédent a permis de présenter les méthodes de résolution d'un problème de dynamique non-linéaire. Les coûts numériques liés au temps de calcul et au stockage important de données pour des systèmes de grande taille sont importants. La recherche de modèles réduits à faible nombre de degrés de liberté (parfois appelés ROM pour l'acronyme anglais Reduced Order Model) est un enjeu majeur qui permet de réduire le temps de calculs tout en gagnant en espace de stockage. Pour les modèles linéaires, on a évoqué dans le paragraphe 1.2.3 le principe de superposition modale qui est souvent appliqué avec une base tronquée. Dans le cas non-linéaire, l'utilisation directe du théorème n'est plus valable. Le principe de réduction consiste à projeter l'équation de l'équilibre dynamique (1.14) sur une base réduite ou encore à identifier les coefficients d'un système réduit à partir des réponses du modèle non réduit. Cela se traduit par l'écriture suivante :

$$X(t) = \sum_{i=1}^m \phi_i q_i(t), \quad (1.49)$$

ϕ_i est un vecteur de la base de projection et $q_i(t)$ le déplacement généralisé. La nature de ϕ varie selon la méthode de réduction adoptée. Plusieurs techniques de réduction existent, elles se distinguent par les outils utilisés tels que les bases de Ritz actualisées, les modes normaux non-linéaires (NNM) ou la décomposition propre orthogonale (POD). Pour une revue détaillée sur les méthodes de réduction non-linéaire, le lecteur est invité à consulter l'article de Lülfi [78].

Une des premières idées développées pour réduire un modèle non-linéaire consiste à utiliser la base des modes propres du système linéarisé. Cette base permet de découpler les termes linéaires, mais reste insuffisante en présence de non-linéarités géométriques en raison des termes de couplage non-linéaire et de la perte d'invariance des sous-espaces propres qui en résulte.

L'idée suivante consiste alors à remédier à cela en minimisant la variance entre une base orthogonale et un ensemble de réponses temporelles obtenus par simulation directe ou par expérience. C'est le principe de la POD qui conduit au calcul des modes propres orthogonaux qui constituent la base orthogonale la mieux adaptée pour reproduire au sens de l'énergie un signal donné. Appliquée initialement à des systèmes linéaires, son

implémentation basée sur des calculs de réponse a permis de l'étendre au cas des systèmes non-linéaires. L'utilisation de la POD est limitée du fait de la dépendance des résultats aux échantillons utilisés. Des approches basées sur les équations du système ont vu le jour, permettant de pallier ce défaut : les modes normaux non-linéaires s'apparentent à une extension des modes du système linéarisé. Nous rappelons par la suite différents éléments de la littérature décrivant ces méthodes.

Réduction à l'aide des bases de Ritz

La réduction par une base de Ritz est une méthode souvent utilisée dans le calcul des réponses dynamiques linéaires et qui a l'avantage de gagner en temps de calcul. En dynamique non-linéaire, la variation de la raideur en fonction des déplacements fait que l'utilisation de cette méthode n'est pas explicite. Ceci dit, elle reste toujours applicable mais contrairement au modèle linéaire, la base de réduction nécessite des modifications au cours de la simulation.

Superposition modale et méthodes d'enrichissement : Sans perte de généralité, on s'intéresse à un système conservatif linéaire dont le comportement est régi par l'équation (1.5). La solution est recherchée sous la forme $U(t) = Tq(t)$ où T désigne la base modale tronquée à l'ordre p . La troncature consiste à ne conserver que les modes propres de la structure sur une bande fréquentielle liée à la bande de calcul. En remplaçant $U(t)$ par $Tq(t)$ et en multipliant à gauche par T^T l'équation (1.5) on obtient :

$$\bar{M}\ddot{q}(t) + \bar{K}q(t) - \bar{f}(t) = 0, \quad (1.50)$$

avec $\bar{M} = T^T MT$, $\bar{K} = T^T KT$ et $\bar{f} = T^T f$.

Il a été rappelé dans le paragraphe 1.2.4 que la propriété d'orthogonalité de la base modale permet de diagonaliser simultanément les matrices M et K , ainsi le système (1.50) de taille p est constitué d'équations linéairement indépendantes. La résolution de ces équations est beaucoup plus rapide que celle du système complet (1.5), cela dit la troncature modale est souvent insuffisante et affecte la qualité de la réponse pour des études de robustesse et d'optimisation. En effet, la contribution statique

des modes de rang élevé n'étant pas prise en compte, des stratégies d'enrichissement sont souvent utilisées pour compléter les informations manquantes. Les enrichissements les plus souvent utilisés sont les enrichissements statiques [40, 48], les condensations dynamiques [100, 101] ou encore la méthode IRS [93] qui utilise les matrices d'état du système et préserve un sous ensemble de degrés de liberté physiques. D'autres méthodes d'enrichissement couplant des coordonnées physiques et généralisées existent également [25], elles constituent la base des méthodes de condensation par sous-structuration. Même si le caractère diagonal des matrices réduites est perdu par ces nouvelles bases de réduction, les méthodes d'enrichissement restent avantageuses en terme de coût comparé au système complet.

Réanalyse approchée : Lors de l'évaluation du comportement mécanique d'une structure subissant des variations paramétriques et non paramétriques, le coût de calcul est primordial. Le calcul exact est exclu et le passage par des modèles réduits pour des réanalyses approchées est une solution intéressante à condition d'avoir des modèles réduits robustes vis-à-vis des variations. La qualité des résultats obtenus dépend alors du contenu de la base de réduction. Ainsi, ce contenu va prendre en compte la nature de la variation. Est-ce une variation paramétrique locale (exemple : modification des conditions aux limites) ou globale (exemple : modification du matériau) ? Est-ce une variation paramétrique ou non paramétrique ? Plusieurs méthodes de réanalyse approchée basées sur des modèles réduits existent dans la littérature. Certaines de ces méthodes sont détaillées dans [124]. Les modifications paramétriques locales peuvent être considérées comme des perturbations externes du modèle initial. Leurs contributions statiques pour enrichir la base de réduction suffisent pour obtenir une base de réduction optimale [7, 76, 81]. Pour des modifications paramétriques quelconques, on peut citer aussi [8, 9] où un modèle réduit global est construit à partir de plusieurs modèles dépendant chacun d'une seule et unique modification. Une autre méthodologie basée sur les dérivées d'ordres supérieures est présentée dans [39, 38]. Elle consiste à associer les résultats en déplacements aux variations indépendantes des paramètres à travers une expansion en série de Taylor.

Méthode des approximations combinées : Les méthodes présentées précédemment ont montré leur efficacité pour des réanalyses approchées paramétriques. Ainsi, des paramètres servent à représenter les modifications apportées à la structure. Ceci n'est toutefois pas toujours possible ; il existe des modifications structurales complexes, difficiles à décrire par une loi paramétrique [21]. Les techniques classiques de construction des bases de réduction ne sont plus adaptées à ce type de problème. La méthode des approximations combinées apparue dans les années quatre-vingt-dix a été développée pour pallier à ce problème [64]. La modification structurale est considérée comme une variation de la structure initiale mais elle n'est plus représentée à l'aide d'un paramètre. L'idée consiste alors à retrouver la base modale du système modifié exprimée en fonction de la base modale du système initial et des modifications apportées. Cette méthode a été appliquée pour des problèmes statiques et dynamiques [58, 59, 60, 62]. La méthode des approximations combinées est décrite dans la suite de ce paragraphe.

Soit l'équilibre dynamique décrit par l'équation (1.5). M et K sont les matrices de masse et de raideur modifiées. On les note respectivement $(M_0 + \Delta M)$ et $(K_0 + \Delta K)$ avec M_0 et K_0 les matrices de masse et de raideur initiale ; ΔM et ΔK les modifications en masse et en raideur. Le problème homogène s'écrit sous la forme :

$$[(K_0 + \Delta K) - \omega_\nu^2(M_0 + \Delta M)] \varphi_\nu = 0. \quad (1.51)$$

L'objectif est de calculer φ_ν . En multipliant l'équation (1.51) par K_0^{-1} , on obtient :

$$[(I + K_0^{-1}\Delta K) - \omega_\nu^2 K_0^{-1}(M_0 + \Delta M)] \varphi_\nu = 0. \quad (1.52)$$

On pose

$$\begin{cases} B_0 = K_0^{-1}\Delta K, \end{cases} \quad (1.53a)$$

$$\begin{cases} r_0 = K_0^{-1}(M_0 + \Delta M)\varphi_\nu, \end{cases} \quad (1.53b)$$

et on introduit l'approximation :

$$r_0 \approx K_0^{-1}(M_0 + \Delta M)\varphi_{0\nu}, \quad (1.54)$$

avec $\varphi_{0\nu}$ le vecteur propre du ν^{eme} mode du système initial non modifié. On peut écrire φ_ν sous la forme suivante :

$$\varphi_\nu = (I + B_0)^{-1} r_0. \quad (1.55)$$

On développe en série de Taylor l'expression $(I + B_0)^{-1}$ et on obtient :

$$\varphi_\nu = (I - B_0 + B_0^2 - \dots) r_0. \quad (1.56)$$

Ainsi, le vecteur propre recherché est approximé en fonction des matrices initiales et des modifications structurales.

Base de Ritz adaptée aux problèmes non-linéaires

L'idée la plus intuitive pour réduire l'équation (1.24) est la résolution du problème aux valeurs propres sans second membre actualisé à chaque itération. Le premier à avoir utilisé le concept de modes propres pour la réduction de modèles de systèmes non-linéaires a été Nickell [91], il construit à chaque pas de temps un système linéarisé pour obtenir un nouvel ensemble de modes propres qui sera utilisé au pas de temps suivant. D'autres auteurs ont travaillé ainsi sur cette méthode, on peut citer Morris [84] qui illustre l'utilité de la méthode dans des applications de portique et de corde. Bathe [11] quant à lui propose une adaptation à la sous-structuration. Idelsohn [47] construit la base à partir des modes tangents et de leurs dérivées ; pour réduire l'erreur engendrée à chaque réduction de modèle, la base n'est actualisée que quelques fois au cours de l'intégration temporelle. Kuran [67] développe une méthode pour l'analyse des réponses harmoniques non-linéaires dans le domaine fréquentiel. L'équation du mouvement est transformée en une série d'équations algébriques non-linéaires réduites par les modes linéaires du système. L'inconvénient majeur de ces méthodes est le problème aux valeurs propres actualisé qui s'avère coûteux et qui réduit l'utilité de la méthode pour des systèmes de grande taille.

L'idée consiste à considérer le comportement non-linéaire comme une modification du comportement linéaire. Le but est alors de construire un modèle réduit à partir du modèle linéaire et de rajouter les informations nécessaires dans la base de réduction pour décrire correctement le comportement non-linéaire. Dans notre étude on s'intéresse aux non-linéarités géométriques localisées et réparties. Dans certaines situations, une

liaison mécanique peut être représentée sous forme discrète par une raideur et un amortisseur linéaire. Les effets non-linéaires sont introduits naturellement dès lors que la discrétisation linéaire ne suffit plus pour une modélisation fidèle. Une des études proposée est dédiée aux liaisons non-linéaires représentées par une raideur polynomiale. En isolant le système initial, le comportement non-linéaire est alors considéré comme une force extérieure agissant sur celui-ci. Sa prise en compte dans la base de réduction s'effectue en rajoutant la réponse statique du système initial due à cette liaison [80, 81]. L'avantage de cette méthode est que la base de réduction n'est générée qu'une seule fois au cours de la simulation.

La non-linéarité géométrique de type grands déplacements décrite au paragraphe 1.3.1 est un comportement élastique (petites déformations) souvent rencontré dans des applications de types structures minces. Ce phénomène a lieu lorsque les amplitudes vibratoires transversales dépassent en valeur absolue l'épaisseur de la structure. Dans ce cas, la raideur est une fonction des déplacements transversaux et elle s'écrit sous la forme ($K = K_0 + \Delta K(U)$). Le terme en ΔK peut être interprété comme une modification structurale implicite ; le problème se rapproche alors d'une réanalyse approchée non paramétrique. Ainsi la méthode des approximations combinées est bien adaptée à la résolution de ce type de problème [63, 61, 37].

Réduction à l'aide de la décomposition orthogonale propre (POD)

La décomposition orthogonale propre encore appelée POD (acronyme de Proper Orthogonal Decomposition) consiste à construire une base de vecteurs de faible dimension à partir d'un ensemble de réponses du système dynamique. Cette méthode est liée à la décomposition de Karhunen-Loève utilisée en probabilités ou encore à l'analyse en composantes principales issue des statistiques. Des liens étroits entre ces deux méthodes et la décomposition en valeurs singulières ont été mis en évidence dans [72]. Liang dans [74] a par ailleurs démontré l'équivalence des trois méthodes lorsque celles-ci sont employées pour des vecteurs discrets aléatoires de dimension finie. Selon les auteurs, la décomposition orthogonale propre peut être considérée soit comme la décomposition de Karhunen-Loève, soit comme un terme générique regroupant à la fois la décomposition de Karhunen-Loève, l'analyse en composantes principales ou encore la décomposition

en valeurs singulières suivant les données auxquelles la procédure est appliquée. Cette méthode est utilisée dans de nombreux domaines de la physique, Kerschen dans [55] propose une synthèse de ses applications en dynamique des structures.

L'idée de la méthode est de réduire un ensemble constitué d'un grand nombre de variables couplées en un ensemble plus petit de variables décorréliées tout en conservant au maximum la variance des données initiales. Pour cela, les vecteurs propres orthogonaux sont calculés comme les vecteurs propres de la matrice de covariance des données et utilisés comme base de réduction. Cette décomposition est optimale vis-à-vis de l'erreur quadratique moyenne où, pour un nombre m donné de vecteurs, les POM (Proper orthogonal modes) sont ceux qui permettent de reconstruire au mieux au sens de l'énergie le champ initial.

Principe de la POD - formulation continue : Soit un champ vibratoire $u(x, t)$ défini sur un domaine $\Omega \times [0; T]$. Ce champ peut être décomposé en sa valeur moyenne temporelle $\mu(x)$ et une composante dépendant du temps de sorte que,

$$u(x, t) = \mu(x) + \vartheta(x, t).$$

On s'intéressera par la suite aux variations du champ autour de sa valeur moyenne i.e. ϑ . En pratique le champ est échantillonné en temps en un nombre fini de clichés. On considère alors un cliché du champ vibratoire à l'instant t_k tel que $\vartheta_k(x) = \vartheta(x, t_k)$. Etant donné n réalisations de $\vartheta(x, t)$ tel que $\vartheta = \{\vartheta_k\}_{k=1}^n$, le principe de la POD consiste à trouver la base de m vecteurs

$$\vartheta(x, t) = \sum_{j=1}^m \xi_j(t) \varphi_j(x),$$

optimale au sens où un élément de l'ensemble des réalisations $\vartheta_k(x)$ est décrit au mieux, ce qui revient à minimiser la distance $\sum_{j=1}^m (\varphi(x) - \vartheta_k(x))^2$. En d'autres termes, il s'agit de chercher une base de fonctions telle que la projection de ϑ soit maximale soit

$$\max_{\vartheta} \frac{E(|(\vartheta, \varphi)|^2)}{\|\varphi\|^2},$$

où $(\vartheta, \varphi) = \int_{\Omega} \vartheta(x)\varphi(x)dx$ désigne le produit scalaire dans l'espace des fonctions,

$\|\cdot\| = (\cdot, \cdot)^{1/2}$ désigne la norme associée et $E(h) = \frac{1}{T} \int_0^T h(t)dt$ l'opérateur de moyenne temporelle. En pratique, l'amplitude des fonctions peut être arbitrairement fixée à 1 par la condition

$$\|\varphi\|^2 = 1.$$

Ainsi, si le champ ϑ est projeté selon φ , l'énergie moyenne dans la projection est supérieure à celle de la projection sur toute autre base. Le maximum est atteint lorsque la dérivée fonctionnelle est nulle, ce qui conduit à l'équation intégrale de Fredholm suivante :

$$\int_0^L E(\vartheta(x), \vartheta(x')) \varphi(x) dx' = \lambda \varphi(x), \quad (1.57)$$

où $E(\vartheta(x), \vartheta(x'))$ désigne la fonction d'auto-covariance entre les points x et x' .

Les solutions de ce problème d'optimisation sont les fonctions propres orthogonales $\varphi_i(x)$ de l'équation intégrale (1.57) encore appelées modes propres orthogonaux (POM) et les valeurs propres correspondantes λ_i sont les valeurs propres orthogonales (POV). Le champ ϑ s'écrit alors en fonction des POMs sous la forme

$$\vartheta(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(x) a_i(t).$$

Les coefficients a_i sont décorrélés, $E(a_i(t), a_j(t)) = \lambda_i \delta_{ij}$ et $a_i(t) = (\vartheta(x, t), \varphi_i)$. Le POM associé à la plus grande POV est le vecteur optimal pour caractériser l'ensemble des clichés. Le POM associé à la seconde plus grande POV est le vecteur qui caractérise le mieux l'ensemble des clichés, mais réduit cette fois-ci au sous-espace orthogonal au premier POM, et ainsi de suite. L'énergie e du champ ϑ est donnée par la somme des POMs $e = \sum_i \lambda_i$, et la fraction d'énergie capturée par le POM est donnée par $\lambda_i / \sum_i \lambda_i$. Le nombre de modes N_m à prendre en compte si le système possède N degrés de liberté est déterminé par le critère

$$\frac{\sum_{i=1}^{N_m} \lambda_i}{e} \geq \alpha,$$

où α est un réel arbitrairement choisi strictement entre 0 et 1.

Principe de la POD - calcul discret En pratique le champ ϑ est discrétisé en temps et en espace. n observations temporelles d'un vecteur spatial de dimension m sont collectées et rassemblées dans une matrice des réponses $X = [x_1, \dots, x_n]$. La moyenne temporelle de ces observations est déterminée par la relation

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad (1.58)$$

et introduite dans la matrice $D = [x_1 - \bar{x}, \dots, x_n - \bar{x}]$. On obtient alors la matrice

$$B = \frac{1}{n} D^T D. \quad (1.59)$$

Les vecteurs de la décomposition orthogonale s'écrivent alors

$$\varphi_i = D\beta_i, \quad (1.60)$$

où les β_i sont les vecteurs propres de D , $D\beta_i = \lambda_i\beta_i$. Le problème à résoudre est un problème de taille $m \times m$ où m est le nombre de vecteurs de la base et donc de dimension réduite par rapport à la taille du système initial.

Avantages et inconvénients de la POD La projection sur les POMs apparait ainsi comme une extension de la projection sur la base des modes propres orthogonaux. Les POMs diffèrent toutefois des modes propres au sens où les POMs sont orthogonaux entre eux alors que les modes propres sont orthogonaux par rapport à la matrice de masse. POMs et modes propres ne peuvent donc rigoureusement être similaires que pour des systèmes où la matrice de masse est proportionnelle à l'identité. Il est possible en revanche de déterminer les modes propres à partir des POMs. La projection sur la base réduite des modes POD est particulièrement intéressante lorsque le second membre du système non-linéaire est polynomial. Dans le cas contraire, il faut procéder par projection sur le sous-espace où le second membre sera calculé avec le modèle complet, ce qui nuit aux potentiels gains de calculs de la réduction.

Un des avantages de la POD est qu'aucune linéarisation n'est nécessaire, en revanche il est nécessaire d'obtenir plusieurs clichés du système non-linéaire non réduit. Ainsi, cette méthode est fortement dépendante des clichés utilisés pour calculer les vecteurs de la base réduite et la capacité du modèle réduit à représenter correctement le système

complet peut être altérée. Une variation des paramètres initiaux peut engendrer des solutions très différentes de celles du système complet. Des méthodes spécifiques sont proposées par [4] pour régulariser les POM. Pour prendre en compte la dépendance des POMs sur des variables aléatoires, Weickum [125] propose une stratégie d'enrichissement de la base par les dérivées des POMs par rapport aux variables aléatoires dans un contexte de réponse transitoire en linéaire.

La POD ne nécessite pas d'hypothèse d'excitation périodique. Kerschen [54] montre, sur une poutre appuyée-appuyée, que les POMs calculés à partir de réponses chaotiques sont plus représentatifs de la dynamique d'un système non-linéaire que les POMs obtenus à partir de toute autre réponse, ceci s'explique par le fait que la quantité d'information contenue dans des données chaotiques couvrant une grande partie du portrait de phase est plus importante et donc plus riche que dans des données issues de réponses périodiques couvrant une partie plus restreinte du portrait.

Il convient enfin de signaler qu'il existe des variantes de la décomposition propre orthogonale comme la *empirical eigenvectors* (EE), dédiée aux applications nécessitant un grand nombre de simulations répétées où l'on retrouve une comparaison de la méthode à la base modale actualisée avec des intégrations implicites et explicites dans le domaine temporel [66]. Boumediene [17] applique la POD aux vibrations des plaques minces en utilisant la méthode asymptotique numérique comme avec la balance harmonique comme technique de résolution. Bouazizi [16] quant à lui adapte la méthode à la sous-structuration dynamique.

Réduction à l'aide des modes normaux non-linéaires

Les modes non-linéaires peuvent être considérés naturellement comme une extension du concept de modes définis dans le cas linéaire à un problème non-linéaire mais avec des différences très marquées : la fréquence et la déformée modale évoluent avec l'amplitude des vibrations. Les premiers travaux sur la théorie des modes non-linéaires sont ceux de Rosenberg [110] dans le cas de systèmes discrets et conservatifs. Un mode non-linéaire est alors défini comme une oscillation périodique synchrone où tous les points atteignent leur valeurs extrémales ou passent par 0 en même temps, la base étant une famille d'orbites périodiques. Cette approche a été reprise dans les travaux de Vakakis

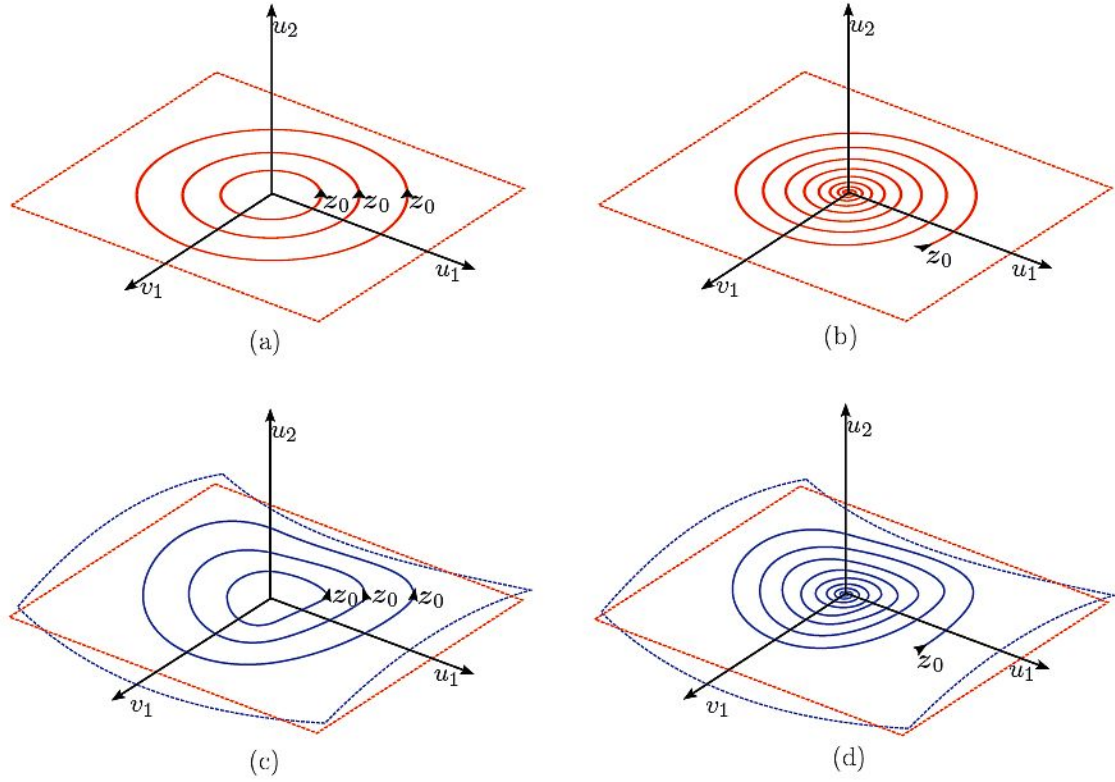


Figure 1.10 – (a) Plan invariant pour le cas linéaire conservatif avec trajectoires périodiques, (b) Plan invariant pour le cas linéaire non conservatifs avec trajectoires inscrites, (c) Surface invariante pour le cas non-linéaire conservatif avec trajectoires inscrites, (d) Surface invariante pour le cas non-linéaire non conservatif avec trajectoire inscrite.

[123]. Shaw et Pierre [111, 112, 102] donnent un nouvel essor à ces travaux dans les années 1990 en utilisant la théorie de réduction à la variété centrale, et permettent ainsi l'extension des modes non-linéaires aux systèmes continus amortis. Un mode non-linéaire est alors défini comme une variété invariante bidimensionnelle de l'espace des phases, tangente à l'origine aux sous-espaces propres linéaires et contenant les orbites périodiques introduites par Rosenberg. Ils généralisent ainsi les surfaces planes linéaires en surfaces courbes non-linéaires. Une surface est dite invariante lorsque pour toutes conditions initiales choisies dans cette surface, les trajectoires restent inscrites dans cette surface (Figure 1.10). Les surfaces sont arbitrairement paramétrées par une paire de variables d'état (déplacement et vitesse) choisies comme coordonnées maîtres, les autres étant reliées par une relation fonctionnelle aux variables choisies.

Différentes stratégies de calcul de ces modes ont été proposées, que l'on peut classer en trois catégories :

- les méthodes analytiques basées par exemple sur un développement asymptotique [15], la méthode des échelles multiples [89, 69], la méthode des formes normales introduite par Poincaré [50], la méthode phase-amplitude [92] ;
- les méthodes basées sur la continuation d'orbites périodiques, par méthode de tir [114] ou par prédiction/correction [102], la continuation d'orbites périodiques par la méthode asymptotique numérique couplée à la méthode de la balance harmonique [105] ou à la méthode des différences finies [12, 5] : ces méthodes nécessitent comme les approches asymptotiques une hypothèse sur la forme des solutions de départ mais le domaine de validité des solutions est élargi ;
- les méthodes géométriques basées sur une recherche explicite des espaces invariants comme la méthode de la variété invariante développée par Touzé et al. qui conserve la structure des oscillateurs [118, 119, 116], la méthode développée par Vakakis et al. basée sur la conservation de l'énergie [56, 57], la méthode de la variété invariante [111, 112], la résolution numérique de l'équation de la variété invariante par méthode de Galerkin [104, 51].

Les travaux numériques restent assez faibles, malgré l'existence de nombreux algorithmes de continuation de solutions périodiques. Ces travaux ont été développés pour pallier aux limites de l'approche asymptotique ; la variété invariante déterminée par calcul asymptotique est valable dans un domaine autour de la position d'équilibre qui n'est pas connu a priori. La précision du calcul dépend de l'ordre du polynôme utilisé dans le développement et cette approche ne se prête pas à l'étude de systèmes en présence de non-linéarités plus complexes car non-régulières de type jeu par exemple. L'intérêt des approches asymptotiques réside dans l'expression analytique des modes non-linéaires qu'elles permettent de construire. En revanche, une critique portée sur les approches numériques est leur dépendance aux conditions de calcul comme le nombre d'harmoniques. La majorité des exemples présentés dans la littérature concerne des modèles à faible nombre de degrés de liberté, un des doutes portés sur les modes non-linéaires est leur potentiel à traiter des structures industrielles de grande dimension avec plusieurs composants et fortement non-linéaires.

Des travaux récents présentent l'application des modes non-linéaires pour la construction de modèles réduits pour des systèmes dynamiques discrets ou continus [116, 117]. Il apparaît ainsi que peu de modes non-linéaires, voire 1 ou 2, suffisent à reproduire le comportement dynamique des systèmes non-linéaires là où un grand nombre de modes linéaires étaient nécessaires. Un seul mode non-linéaire permet notamment de prédire correctement le type de la non-linéarité, durcissant ou mollissant, là où un mode linéaire ne le permet pas. Cela ouvre la voie à leur utilisation pour la réduction de modèles de grande taille, et ce malgré le non-respect de la condition d'orthogonalité.

Les méthodes POD et NNM sont à l'heure actuelle les plus étudiées pour la réduction de modèles non-linéaires. Elles se distinguent en plusieurs points. Tout d'abord, la méthode POD est par essence linéaire puisqu'elle consiste à chercher les hyperplans de l'espace des phases les plus proches des données utilisées pour construire le modèle, a contrario, la méthode NNM est par essence non-linéaire puisque les variétés de l'espace des phases sont cherchées sous forme de courbes. Par ailleurs, la méthode POD nécessite de disposer préalablement d'une série de données temporelles, soit issues de simulations numériques, soit obtenues expérimentalement, là où la méthode NNM exploite le spectre de l'opérateur linéaire du modèle utilisé. Selon que l'on dispose donc d'un modèle ou des résultats expérimentaux, la méthode NNM ou la méthode POD s'avèrera donc plus appropriée. Une comparaison de l'efficacité respective de la réduction par les POD et par les NNM est proposée dans [3] : pour des amplitudes de déplacement modérées, les NNM conduisent à un modèle réduit plus précis que les PODs, mais leur nature asymptotique ne permet pas de les utiliser pour de très grands déplacements sans des coûts de calcul prohibitifs, et les PODs, par leur approche globale, sont alors plus efficaces.

Les problèmes ouverts qui restent à traiter pour une utilisation des modes non-linéaires portent sur le perfectionnement des outils de calcul et le calcul de ces modes pour des systèmes de grande dimension en utilisant notamment les possibilités des codes de calcul éléments finis.

Chapitre 2

Non-linéarités géométriques : modélisation et réduction de modèles

2.1 Introduction

Le chapitre précédent présentait des généralités sur les vibrations de structures non-linéaires et les techniques de résolution numérique. Ces techniques s'appliquent dans les domaines temporels et fréquentiels. Les méthodes de résolution temporelle sont caractérisées par un schéma d'intégration temporel implicite ou explicite, et les méthodes de résolution fréquentielle utilisent les techniques de continuation ou de perturbation.

Dans le cadre de ce travail, nous nous sommes focalisés sur deux types de non-linéarités fréquemment rencontrées dans les modèles dynamiques :

- la non-linéarité géométrique en grands déplacements. Il s'agit d'un type de non-linéarité rencontré lors de l'analyse de structures minces en vibrations. Les hypothèses établies sont les suivantes : le domaine de validité est le domaine élastique, les déformations sont considérées infinitésimales et les rotations modérées. En pratique, ce comportement est observé dès que le déplacement transversal de la structure dépasse la valeur de son épaisseur.
- La non-linéarité localisée en grands déplacements qui traduit une liaison entre deux pièces ou entre une pièce et le bâti, la relation effort-déplacement est alors modélisée par un polynôme de degré 2 ou 3.

La méthode des éléments finis utilisée pour la modélisation des structures industrielles engendre un temps de calcul rédhibitoire en réanalyse. En effet, la discrétisation du domaine spatial génère des matrices de taille importante qui nécessitent un espace de stockage non négligeable menant à des opérations mathématiques considérables. La réduction de modèle est un outil indispensable pour remédier à cela ; ainsi, des méthodes de réduction ont été éprouvées pour les systèmes linéaires et ont fait leur preuve dans les applications industrielles. Pour les systèmes non-linéaires, force est de constater que les techniques de réduction proposées sont rarement probantes et montrent certaines limitations en termes d'efficacité et de fiabilité.

Dans ce chapitre, nous développons des méthodes de réduction adaptées aux problèmes traités, l'objectif étant à terme de les appliquer à des structures industrielles. La première partie rappelle la formulation du problème non-linéaire géométrique en grands déplacements des structures minces en vibrations ; les structures de types plaques minces sont étudiées en particulier. Une méthode de réduction adaptée à ce problème est proposée par la suite, avant de développer une approche dédiée aux structures présentant des non-linéarités localisés.

2.2 Plaques minces en grands déplacements

Pour une vue détaillée sur les vibrations des plaques et des coques en grands déplacements, le lecteur est invité à consulter l'article de Moussaoui et Benamar [85]. Les plaques sont des structures fréquemment utilisées dans la conception des systèmes mécaniques (caisse de voiture, instrument musical à percussion, ailes d'avion...), ce sont des structures présentant deux dimensions importantes devant la troisième. On parle de plaque mince [130] lorsque le rapport entre la longueur et l'épaisseur est supérieur à 20. Elles se caractérisent par une sensibilité importante aux vibrations et peuvent atteindre naturellement un comportement non-linéaire en présence de grands déplacements. Le modèle de Love-Kirchhoff est généralement utilisé pour modéliser les plaques minces. Il est inspiré du modèle d'Euler-Bernoulli dédié aux poutres. On rappelle ci-après la formulation mathématique du modèle Love-Kirchhoff pour déterminer le champ de déplacements. Le tenseur de 2^{nd} ordre des déformations de Green-Lagrange est déduit

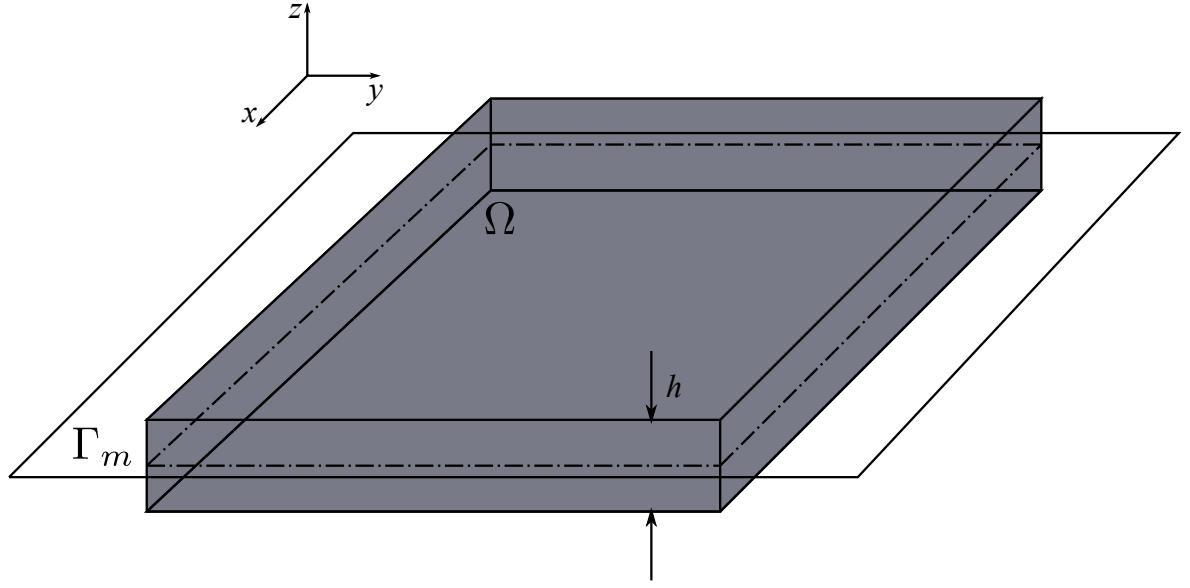


Figure 2.1 – Géométrie d'une plaque et son plan moyen

ci-après afin d'obtenir la formulation variationnelle du problème.

Soit une plaque délimitée par le volume Ω , d'épaisseur h dans le repère global $\Re(x, y, z)$ (figure 2.1). Soit Γ_m le plan moyen parallèle au plan ($z = 0$) et situé à équidistance entre les deux faces de la plaque.

Les hypothèses du modèle de Love-Kirchhoff sont les suivantes :

- le plan moyen est initialement plan,
- les sections normales au plan moyen restent normales (le cisaillement est négligé),
- l'épaisseur est faible : les contraintes de cisaillement sont négligées.

Le problème est alors un problème de contraintes planes et le champ de déplacements global est déterminé par celui du plan moyen tel que :

$$\mathbf{u}(x, y, z, t) = \begin{Bmatrix} u(x, y, t) \\ v(x, y, t) \\ w(x, y, t) \end{Bmatrix} - z \begin{Bmatrix} w_{,x}(x, y, t) \\ w_{,y}(x, y, t) \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (2.1)$$

où \mathbf{u} est le vecteur de déplacements d'un point $M(x, y, z)$ quelconque, u et v sont les déplacements dans le plan moyen de la projection de M et w le déplacement transversal.

Le tenseur du 2nd ordre des déformations de Green-Lagrange est lié au champ de déplacements par la relation :

$$\mathbf{E}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) + \frac{1}{2} \nabla \mathbf{u} \nabla \mathbf{u}^T. \quad (2.2)$$

L'hypothèse de petites déformations et de rotations modérées permet d'écrire le tenseur de déformations de Green-Lagrange sous la forme vectorielle suivante :

$$\mathbf{E} = \begin{Bmatrix} E_{xx} \\ E_{yy} \\ 2E_{xy} \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{Bmatrix} u_{,x} \\ v_{,y} \\ u_{,y} + v_{,x} \end{Bmatrix}}_{\mathbf{E}^m} - z \underbrace{\begin{Bmatrix} w_{,xx} \\ w_{,yy} \\ 2w_{,xy} \end{Bmatrix}}_{\mathbf{K}^f} + \frac{1}{2} \underbrace{\begin{Bmatrix} (w_{,x})^2 \\ (w_{,y})^2 \\ 2w_{,x}w_{,y} \end{Bmatrix}}_{\mathbf{E}^c}, \quad (2.3)$$

avec :

- \mathbf{E}^m vecteur des déformations dues à l'effet membrane,
- $\mathbf{E}^f = z\mathbf{K}^f$ vecteur des déformations dues à l'effet flexion,
- \mathbf{E}^c vecteur des déformations non-linéaires qui traduit le couplage entre les effets de membrane et de flexion dans le plan moyen.

Le terme \mathbf{E}^c n'apparaît pas dans le cas linéaire et les problèmes de membrane et de flexion sont résolus indépendamment. Dans le cas non-linéaire cela n'est plus possible et il faut tenir compte de l'influence du couplage. Le paragraphe suivant rappelle la formulation variationnelle du problème qui est utilisée pour obtenir une écriture discrétisée par la méthode des éléments finis.

2.2.1 Formulation variationnelle

Pour aboutir à la formulation variationnelle, on écrit le principe des travaux virtuels entre les instants t_1 et t_2 qui se traduit par l'équation :

$$\delta\Pi = \delta \int_{t_1}^{t_2} (U_0 + T_0) dt = 0, \quad (2.4)$$

où

- U_0 est l'énergie potentielle totale égale à la somme de l'énergie de déformation interne (U_{def}) et de l'énergie potentielle des forces exercées (U_{pot}),
- T_0 est l'énergie cinétique.

Soit

$$\begin{cases} T_0(\mathbf{u}) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho \dot{\mathbf{u}} \cdot \dot{\mathbf{u}} dV, \\ U_0 &= U_{pot} + U_{def} = U_{pot} + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \underline{\mathbf{E}} : \underline{\mathbf{S}} dV, \end{cases} \quad (2.5)$$

avec $\underline{\mathbf{S}}$ le 2^{nd} tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff. $\delta\Pi$ s'écrit alors sous la forme :

$$\delta\Pi = \int_{\Omega} (\delta E^m + \delta E^c)^T \underline{\mathbf{S}} dV - \int_{\Omega} (\delta K^f)^T \underline{\mathbf{S}} z dV + \delta\Pi_{inertie} - \delta\Pi_{ext} = 0, \quad (2.6)$$

où, $\delta\Pi_{ext}$ représente les travaux virtuels issus de l'énergie potentielle et $\delta\Pi_{inertie}$ les travaux virtuels issus de l'énergie cinétique.

Soient T^e et M^f les contraintes généralisées suivantes :

$$\begin{cases} T^e &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \underline{\mathbf{S}} dz, \text{ Effort tranchant,} \\ M^f &= - \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \underline{\mathbf{S}} dz, \text{ Moment fléchissant.} \end{cases} \quad (2.7)$$

Ainsi,

$$\delta\Pi = \int_{\Gamma_m} (\delta E^m + \delta E^c)^T (T^e) dS + \int_{\Gamma_m} (\delta K^f)^T M^f dS + \delta\Pi_{inertie} - \delta\Pi_{ext} = 0. \quad (2.8)$$

Le matériau considéré est un matériau isotrope élastique caractérisé par son module de Young E et son coefficient de poisson ν ; sa loi de comportement est traduite par l'équation :

$$\begin{Bmatrix} T^e \\ M^f \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D^m & 0 \\ 0 & D^f \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E^m + E^c \\ K^f \end{Bmatrix}, \quad (2.9)$$

avec,

$$\begin{cases} D^m = \frac{Eh}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}, \\ D^f = \frac{h^2}{12} D^m. \end{cases} \quad (2.10)$$

La formulation variationnelle s'écrit finalement sous la forme :

$$\delta\Pi = \int_{\Gamma_m} (\delta E^m + \delta E^c)^T D^m (E^m + E^c) dS + \int_{\Gamma_m} (\delta K^f)^T D^f K^f dS + \delta\Pi_{inertie} - \delta\Pi_{ext} = 0. \quad (2.11)$$

Cette équation permet le passage au modèle éléments finis en discrétisant l'espace Γ_m en un nombre fini d'éléments.

2.2.2 Discrétisation par la méthode des éléments finis

La méthode des éléments finis est un outil très répandu en calcul de structures. Grâce aux progrès de l'informatique, elle est devenue incontournable dans tous les secteurs dès la phase de prédimensionnement jusqu'à la conception et l'optimisation.

Ce paragraphe rappelle la formulation éléments finis des éléments plaques minces en non-linéarité géométrique et on s'intéresse en particulier à la forme des matrices élémentaires.

Le point de départ de la méthode des éléments finis est la formulation variationnelle du problème. L'équation (2.1) montre que ce problème admet trois variables variationnelles (u, v, w) ; les rotations sont les dérivées spatiales de w , elles sont considérées comme variables dépendantes. Le modèle éléments finis doit inclure les degrés de liberté en translations (U, V, W) ainsi que les rotations (Θ_x, Θ_y) , soit cinq degrés de liberté par noeud. Le nombre d'inconnues variationnelles est inférieur au nombre de degrés de liberté par noeud, l'approximation éléments finis s'écrit sous la forme :

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N^W & N^{\Theta_x} & N^{\Theta_y} \end{bmatrix} \underbrace{\begin{Bmatrix} U \\ V \\ W \\ \Theta_x \\ \Theta_y \end{Bmatrix}}_X. \quad (2.12)$$

N et $N^w = [N^W \ N^{\Theta_x} \ N^{\Theta_y}]$ sont des vecteurs lignes interpolant respectivement u , v pour N et w pour N^w . La taille de ces vecteurs dépend du type d'élément choisi, la taille de N est égale au nombre de noeuds de l'élément choisi et N^w aura cette taille multipliée par trois.

Ainsi, le principe des travaux virtuels dûs aux forces extérieures et en présence de l'inertie se traduit par la forme discrète suivante :

$$\begin{cases} \delta \Pi_{ext} &= \delta X^T F(t), \\ \delta \Pi_{inertie} &= \delta X^T M \ddot{X}(t), \end{cases} \quad (2.13)$$

avec $F(t)$ le vecteur des forces extérieures et M la matrice de masse.

En substituant l'équation (2.12) dans l'équation (2.3), les trois composantes du tenseur de Green-Lagrange discrétisées (E^m, K^f et E^c) s'écrivent sous la forme :

$$E^m = \underbrace{\begin{bmatrix} N_{,x} & 0 \\ 0 & N_{,y} \\ N_{,y} & N_{,x} \end{bmatrix}}_{B^m} \underbrace{\begin{Bmatrix} U \\ V \end{Bmatrix}}_{\tilde{U}}, \quad (2.14)$$

$$E^c = \frac{1}{2} \underbrace{\begin{bmatrix} w_{,x} & 0 \\ 0 & w_{,y} \\ w_{,y} & w_{,x} \end{bmatrix}}_{B^{nl}(\tilde{W})} \underbrace{\begin{bmatrix} N_{,x}^W & N_{,x}^{\Theta_x} & N_{,x}^{\Theta_y} \\ N_{,y}^W & N_{,y}^{\Theta_x} & N_{,y}^{\Theta_y} \end{bmatrix}}_G \underbrace{\begin{Bmatrix} W \\ \Theta_x \\ \Theta_y \end{Bmatrix}}_{\tilde{W}}, \quad (2.15)$$

$$K^f = \underbrace{\begin{bmatrix} N_{,xx}^W & N_{,xx}^{\Theta_x} & N_{,xx}^{\Theta_y} \\ N_{,yy}^W & N_{,yy}^{\Theta_x} & N_{,yy}^{\Theta_y} \\ N_{,xy}^W & N_{,xy}^{\Theta_x} & N_{,xy}^{\Theta_y} \end{bmatrix}}_{B^f} \begin{Bmatrix} W \\ \Theta_x \\ \Theta_y \end{Bmatrix}. \quad (2.16)$$

Le terme $H(\tilde{W})$ dans E^c s'écrit sous la forme discrète suivante :

$$H(\tilde{W}) = \begin{bmatrix} N_{,x}^W & N_{,x}^{\Theta_x} & N_{,x}^{\Theta_y} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_{,y}^W & N_{,y}^{\Theta_x} & N_{,y}^{\Theta_y} \\ N_{,y}^W & N_{,y}^{\Theta_x} & N_{,y}^{\Theta_y} & N_{,x}^W & N_{,x}^{\Theta_x} & N_{,x}^{\Theta_y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W & 0 \\ \Theta_x & 0 \\ \Theta_y & 0 \\ 0 & W \\ 0 & \Theta_x \\ 0 & \Theta_y \end{bmatrix}. \quad (2.17)$$

Ainsi, le tenseur de Green-Lagrange et sa forme variationnelle, s'écrivent sous la forme discrète suivante :

$$\begin{cases} E &= B^m \tilde{U} + \frac{1}{2} B^{nl}(\tilde{W}) \tilde{W} - z B^f \tilde{W}, \\ \delta E &= B^m \delta \tilde{U} + B^{nl}(\tilde{W}) \delta \tilde{W} - z B^f \delta \tilde{W}, \end{cases} \quad (2.18)$$

et la forme discrète des travaux virtuels de déformations devient :

$$\begin{aligned} \delta \Pi_{def} = & \int_{\Gamma_m} \left(B^m \delta \tilde{U} + B^{nl}(\tilde{W}) \delta \tilde{W} \right)^T D^m \left(B^m \tilde{U} + \frac{1}{2} B^{nl}(\tilde{W}) \tilde{W} \right) dS \\ & + \int_{\Gamma_m} \left(B^f \delta \tilde{W} \right)^T D^f B^f \tilde{W} dS, \end{aligned} \quad (2.19)$$

ou encore sous forme matricielle :

$$\delta \Pi_{def} = \delta X^T \int_{\Gamma_m} \begin{bmatrix} B^{mT} D^m B^m & \frac{1}{2} B^{mT} D^m B^{nl}(\tilde{W}) \\ B^{nlT}(\tilde{W}) D^m B^m & \frac{1}{2} B^{nlT}(\tilde{W}) D^m B^{nl}(\tilde{W}) + B^{fT} D^f B^f \end{bmatrix} X dS, \quad (2.20)$$

soit :

$$\delta \Pi_{def} = \delta X^T K X, \quad (2.21)$$

où

$$\begin{aligned} K = & \underbrace{\int_{\Gamma_m} \begin{bmatrix} B^{mT} D^m B^m & 0 \\ 0 & B^{fT} D^f B^f \end{bmatrix} dS}_{K^l} \\ & + \underbrace{\int_{\Gamma_m} \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} B^{mT} D^m B^{nl}(\tilde{W}) \\ B^{nlT}(\tilde{W}) D^m B^m & \frac{1}{2} B^{nlT}(\tilde{W}) D^m B^{nl}(\tilde{W}) \end{bmatrix} dS}_{\Delta K^{nl}(\tilde{W})}. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Le terme K^l est le terme linéaire modélisant les problèmes de membrane et de flexion découplés, et le terme ΔK^{nl} est le terme non-linéaire faisant apparaître le couplage entre les effets.

Le problème non-linéaire apparaît comme une perturbation (ou une modification) du problème linéaire ; cette forme offre un grand avantage pour l'introduction de la réduction de modèle. Ceci sera détaillé par la suite.

Finalement, $\forall \delta X$ cinématiquement admissible l'écriture du principe des travaux virtuels (ou de la formulation variationnelle) conduit à l'équation du mouvement écrite sous la forme discrète suivante :

$$\begin{bmatrix} M_m & 0 \\ 0 & M_f \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\tilde{U}} \\ \ddot{\tilde{W}} \end{Bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} K_m & 0 \\ 0 & K_f \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \Delta K_1 \\ \Delta K_1^T & \Delta K_2 \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \tilde{U} \\ \tilde{W} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F^{\tilde{U}} \\ F^{\tilde{W}} \end{Bmatrix}, \quad (2.23)$$

soit :

$$M\ddot{X} + \underbrace{K(X)X}_{f_{nl}} - F = 0, \quad (2.24)$$

où f_{nl} désigne la force non-linéaire incluant les effets linéaire et non-linéaire du problème.

2.2.3 Résolution et expression de la matrice tangente

La résolution de l'équation (2.24) dépend généralement de la nature de $F(t)$. Le chapitre précédent décrit les méthodes les plus répandues pour la résolution des équations différentielles non-linéaires du second ordre. Ces méthodes nécessitent la matrice de raideur tangente ou le gradient spatial de la force non-linéaire. La minimisation de l'équation (2.24) par un schéma itératif engendre un terme df_{nl} tel que :

$$df_{nl}(X) = \frac{\partial f_{nl}}{\partial X} dX = K^t dX. \quad (2.25)$$

Le terme K^t est la matrice de raideur tangente, il représente le gradient spatial de la force non-linéaire. En écrivant la force non-linéaire sous la forme suivante :

$$f_{nl}(X) = \begin{Bmatrix} f_{\tilde{U}} \\ f_{\tilde{W}} \end{Bmatrix},$$

la matrice tangente K^t s'écrit alors sous la forme :

$$K^t = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_{\tilde{U}}}{\partial \tilde{U}} & \frac{\partial f_{\tilde{U}}}{\partial \tilde{W}} \\ \frac{\partial f_{\tilde{W}}}{\partial \tilde{U}} & \frac{\partial f_{\tilde{W}}}{\partial \tilde{W}} \end{bmatrix}. \quad (2.26)$$

Le développement des quatre termes constituant K^t conduit à une matrice tangente (annexe B) qui s'écrit sous la forme :

$$\begin{aligned}
 K^t = & \underbrace{\int_{\Gamma_m} \begin{bmatrix} B^{mT} D^m B^m & 0 \\ 0 & B^{fT} D^f B^f \end{bmatrix} dS}_{K^l} \\
 & + \underbrace{\int_{\Gamma_m} \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} B^{mT} D^m B^{nl}(\tilde{W}) \\ B^{nlT}(\tilde{W}) D^m B^m & \frac{1}{2} B^{nlT}(\tilde{W}) D^m B^{nl}(\tilde{W}) \end{bmatrix} dS}_{\Delta K^{nl}} \\
 & + \underbrace{\int_{\Gamma_m} \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} B^{mT} D^m B^{nl}(\tilde{W}) \\ 0 & \frac{1}{2} B^{nlT} D^m B^{nl}(\tilde{W}) + G^T T^m G \end{bmatrix} dS}_{\Delta K^t}.
 \end{aligned} \tag{2.27}$$

Quelle que soit la méthode de résolution, les équations différentielles non-linéaires restent coûteuses en temps de calcul. Ces coûts importants sont notamment dus à :

- la procédure d'inversion des matrices dans le schéma de prédiction-correction, qui nécessite un espace de stockage important pour des systèmes de grandes tailles ;
- l'évaluation de la force non-linéaire à chaque itération, qui nécessite une réactualisation aux niveaux élémentaires des termes ΔK^{nl} et ΔK^t . Ces termes sont assemblés par la suite pour obtenir les matrices globales. Bien qu'elle soit simple à mettre en oeuvre, la procédure itérative engendre finalement un temps de calcul considérable.

La technique de réduction de modèle permet de manipuler des systèmes de petites tailles et de remédier à la problématique de mémoire informatique. Concernant l'évaluation de la force non-linéaire, celle-ci peut être parallélisée ; le temps de calcul gagné sera en lien direct avec les ressources informatiques disponibles. Les paragraphes qui suivent décrivent les techniques de réduction et de parallélisation proposées dans ce travail.

2.2.4 Réduction de modèles non-linéaires

La réduction de modèles est un outil souvent utilisé pour diminuer les temps de calcul lors de la mise en œuvre de la méthode des éléments finis. Les études d'optimisation et de robustesse, très coûteuses en temps de calcul, nécessitent l'emploi de réanalyses approchées via des modèles réduits. L'idée est de construire un modèle réduit représentant le système modifié à partir des données du système initial. Plus concrètement, en terme d'application aux éléments finis, il s'agit de calculer la base de réduction du modèle modifié en fonction de la base de réduction du modèle initial et ce sans passer par un calcul des valeurs propres du système modifié.

L'équation (2.24) modélisant le problème de vibrations non-linéaires peut être considérée comme un problème de réanalyse ; en effet, on peut interpréter la décomposition de la force non-linéaire en un terme linéaire K^l et un terme de perturbation ΔK^{nl} . Ce dernier terme étant évolutif en temps (ou en fréquence), la base de réduction doit l'être aussi. D'autre part, en raison du couplage entre la membrane et la flexion (équation (2.23)), le critère de troncature modale basé uniquement sur la bande de fréquence d'intérêt n'est plus pertinent.

Stratégie de réduction de modèles

La stratégie proposée dans cette étude pour construire le modèle réduit prend en compte les effets de couplages et de perturbations. La base de réduction initiale contient les modes de membranes et les modes de flexion. Ces modes vérifient les problèmes aux valeurs propres découplés suivants :

$$\begin{cases} (K_m - \lambda_m M_m) \varphi_m = 0, \\ (K_f - \lambda_f M_f) \varphi_f = 0. \end{cases} \quad (2.28)$$

λ_m et λ_f sont respectivement les valeurs propres de membranes et de flexions, φ_m et φ_f leurs vecteurs propres associés. La base de réduction du problème initial aura la forme découplée suivante :

$$T_0 = \begin{bmatrix} T_m & 0 \\ 0 & T_f \end{bmatrix}, \quad (2.29)$$

avec :

$$\begin{cases} T_m &= [\varphi_m^1 \cdots \varphi_m^\nu \cdots \varphi_m^i], \\ T_f &= [\varphi_f^1 \cdots \varphi_f^\nu \cdots \varphi_f^j]. \end{cases} \quad (2.30)$$

T_m est la base des vecteurs propres associés aux valeurs propres de membrane tronquée à i modes et T_f est la base des vecteurs propres associés aux valeurs propres de flexion tronquée à j modes.

La base T_0 constitue pour une première approximation, une base de réduction 'relativement correcte' en terme de prédiction. En fonction du degré de non-linéarité affectant le comportement de la structure, les modes de membranes qui sont habituellement hauts en fréquence par rapport aux modes de flexion, contribuent fortement à la réponse de la structure en basses fréquences. La stratégie d'enrichissement de la base de réduction est indispensable pour une prédiction optimale.

Réanalyse par approximation directe

Un problème de réanalyse classique s'écrit sous la forme suivante :

$$[(K_0 + \Delta K) - \lambda (M_0 + \Delta M)] \varphi = 0. \quad (2.31)$$

Il s'agit d'un problème de réanalyse structurale présentant des modifications aux niveaux de la masse et de la raideur. Les inconnues du problème sont λ et φ que l'on souhaite estimer sans résoudre le problème aux valeurs propres, très coûteux. K_0 et M_0 sont les matrices du problème initial, elles vérifient le problème aux valeurs propres initial connu et déjà résolu :

$$[K_0 - \lambda_0 M_0] \varphi_0 = 0. \quad (2.32)$$

En considérant l'hypothèse de faible perturbation, les vecteurs propres du système modifié sont proches du système initial, d'où :

$$\varphi = \varphi_0 + \Delta \varphi. \quad (2.33)$$

L'équation (2.31) s'écrit alors sous la forme :

$$(K_0 + \Delta K) \varphi = \lambda (M_0 + \Delta M) \varphi_0 + \lambda (M_0 + \Delta M) \Delta \varphi. \quad (2.34)$$

L'effet inertiel sur $\Delta\varphi$ est faible devant l'effet élastique :

$$\|\lambda (M_0 + \Delta M) \Delta\varphi\| \ll \|(K_0 + \Delta K) \Delta\varphi\|, \quad (2.35)$$

l'équation (2.34) devient :

$$(K_0 + \Delta K) \varphi = \lambda (M_0 + \Delta M) \varphi_0. \quad (2.36)$$

Le scalaire λ peut être intégré dans la constante de normalisation du vecteur propre qui peut être estimé par la résolution d'un problème statique :

$$\varphi = (K_0 + \Delta K)^{-1} (M_0 + \Delta M) \varphi_0. \quad (2.37)$$

Ainsi, la base de réduction du système modifié est exprimée par l'écriture approchée suivante :

$$T \approx (K_0 + \Delta K)^{-1} (M_0 + \Delta M) T_0. \quad (2.38)$$

Cependant, les approximations effectués lors de la construction de cette base impliquent qu'elle ne vérifie pas les propriétés d'orthogonalité entre les vecteurs, ni celle de l'unicité de chacun. Une décomposition en valeurs singulières (*SVD*, annexe A) est nécessaire pour garantir un bon conditionnement du problème.

Réanalyse par approximations combinées : Méthode CA

Le terme $(K_0 + \Delta K)$ étant un terme variable, l'inconvénient majeur dans la méthode présentée ci-dessus est la procédure d'inversion de ce terme à chaque itération. La méthode des approximations combinées évite ce problème et ne nécessite qu'une seule inversion du terme K_0 constant. En multipliant l'équation (2.36) par K_0^{-1} et en posant :

$$\begin{cases} r_0 &= K_0^{-1} (M_0 + \Delta M) \varphi_0, \\ B_0 &= K_0^{-1} \Delta K, \end{cases} \quad (2.39)$$

l'équation (2.38) devient :

$$T = (I + B_0)^{-1} r_0. \quad (2.40)$$

Le développement du terme $(I + B_0)^{-1}$ en série de Taylor permet d'approximer la base T à l'ordre ν tel que :

$$T = (I - B_0 + B_0^2 + \cdots + (-B_0)^{\nu-1}) r_0. \quad (2.41)$$

La méthode des approximations combinées consiste à remplacer la somme des termes de la série de Taylor par un enrichissement de la base r_0 via ces nouveaux termes. La procédure de construction de la base de réduction par approximations combinées se présente comme suit :

1. Factorisation de K_0 en L par la méthode de Cholesky et inversion de L :

$$K_0 = LL^T,$$

$$S_0 = K_0^{-1} = (L^{-1})^T L^{-1}.$$

2. Calcul de r_0 et normalisation par rapport à la masse :

$$r_0 = \alpha S_0 (M_0 + \Delta M) T_0,$$

avec α un scalaire tel que :

$$r_0^T M r_0 = I.$$

3. Calcul de B_0 :

$$B_0 = S_0 \Delta K.$$

4. Calcul de la sous-base r_i et normalisation par rapport à la masse :

$$r_i = -\alpha_i B_0 r_{i-1} \quad (i = 1 \cdots \nu - 1),$$

avec α_i un scalaire tel que :

$$r_i^T M r_i = I.$$

5. Assemblage des sous-bases r_i :

$$T_{CA} = [r_0 \cdots r_i \cdots r_{\nu-1}].$$

6. Décomposition en valeurs singulières de T_{CA} .

Dans le cas où K_0 est une matrice singulière la technique de filtrage (annexe A) ou de décalage spectral est appliquée. Pour cette dernière, les paramètres de la méthode, r_0 et B_0 s'écrivent alors :

$$\begin{cases} r_0 &= (K_0 + \mu M)^{-1} (M_0 + \Delta M) T_0, \\ B_0 &= (K_0 + \mu M)^{-1} \Delta K, \end{cases} \quad (2.42)$$

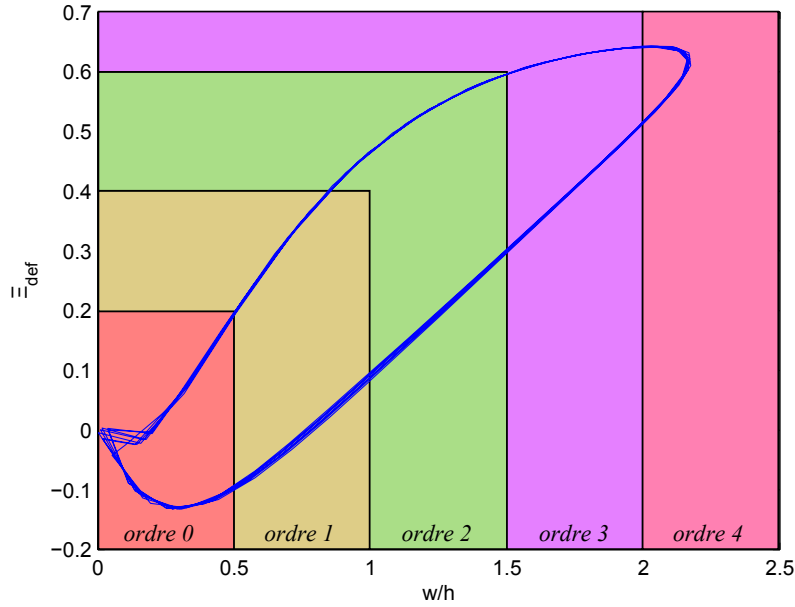
où μ désigne la valeur du décalage spectral.

Ordre de la série de Taylor

La méthode des approximations combinées est fondée sur l'hypothèse des petites perturbations de ΔK par rapport à K_0 . On considère que celle-ci est validée car le comportement de la structure reste élastique. D'autre part, le choix sur l'ordre du développement de la série de Taylor doit être pertinent afin d'avoir une approximation conforme à l'équation exacte. L'erreur engendrée par ce développement est difficile à estimer pour des systèmes matriciels de grandes tailles. Toutefois, elle est en lien direct avec ΔK qui décrit le niveau de non-linéarité. De même, le déplacement relatif, qui désigne le rapport du déplacement transversal sur l'épaisseur, permet d'apprécier quantitativement le niveau de non-linéarité. En règle générale et dans le cas statique des structures minces, les grands déplacements sont considérés à partir d'un déplacement relatif unitaire. On propose ainsi de lier l'ordre de la série de Taylor au déplacement relatif maximal. Cependant, il serait toujours difficile de surveiller le déplacement relatif maximal (quelle noeud choisir ?) pour des réponses transitoires (non-harmoniques). Un critère énergétique qui décrit le rapport de l'énergie de déformation non-linéaire sur l'énergie de déformation totale du système est introduit. L'expression de ce critère énergétique est définie telle que :

$$\Xi_{def} = \frac{X^T \Delta K X}{X^T (K_0 + \Delta K) X}. \quad (2.43)$$

La figure 2.2 montre l'évolution de Ξ_{def} en fonction du déplacement relatif maximal pour une excitation harmonique au centre d'une plaque de dimension $580 \times 20 \times 2 \text{ mm}^3$. On remarque que l'allure de cette courbe est toujours identique pour toute excitation


 Figure 2.2 – Evolution de Ξ_{def} en fonction du déplacement maximal relatif.

harmonique appliquée à une structure mince. Le tableau 2.1 propose l'ordre de la série de Taylor en fonction du critère énergétique ou du déplacement relatif maximal. Au cours du calcul de la réponse temporelle, à chaque itération où il faut calculer une base de réduction, on se réfère à l'itération précédente pour évaluer Ξ_{def} ou w/h et définir l'ordre du développement selon le tableau. C'est un choix qui a été fait a posteriori et qui permet d'éviter le calcul de l'erreur engendrée par le développement en série de Taylor. A noter qu'une fois un certain ordre atteint, il est déconseillé de repasser à l'ordre inférieur ; ce critère permet essentiellement d'indiquer s'il y a besoin d'augmenter l'ordre de la série.

$ \Xi_{def} $	0 - 0.2	0.2 - 0.4	0.4 - 0.6	0.6 - 0.8	> 0.8
$ w_{max}/h $	0 - 0.5	0.5 - 1	1 - 1.5	1.5- 2	> 2
Ordre	0	1	2	3	4

Tableau 2.1 – Ordre de la série de Taylor.

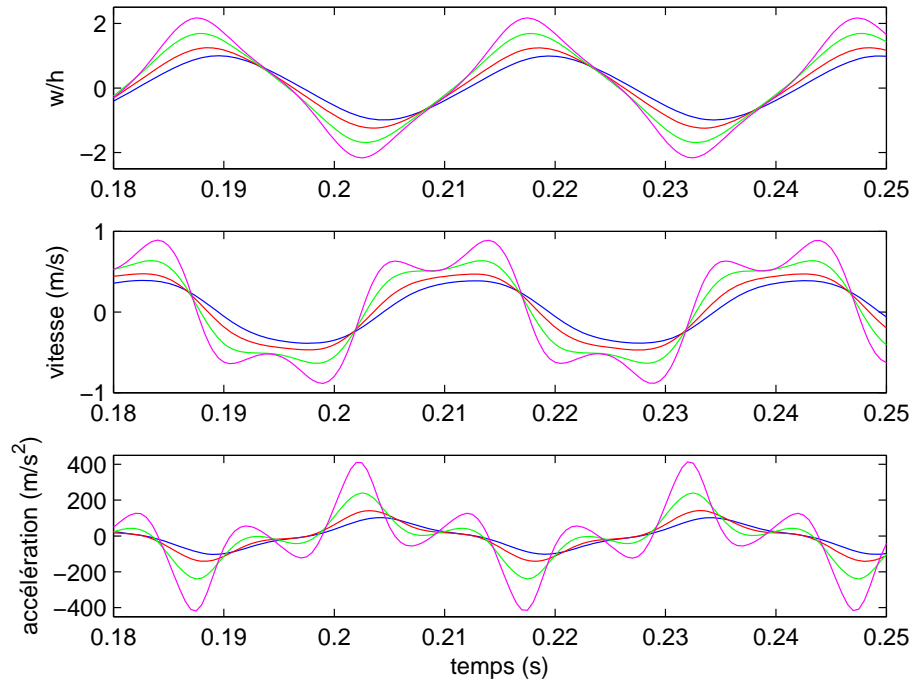
Actualisation de la base de réduction :

L'actualisation de la base de réduction à chaque itération est une procédure coûteuse en temps. Pour améliorer les performances de la méthode *CA*, cette actualisation peut ne pas être systématique. Cependant, l'instant de l'actualisation doit suivre un critère physique. L'idée est d'actualiser à des instants spécifiques faciles à identifier : lors du passage sur des minimaux ou des maximaux (en déplacement, vitesse ou accélération), une nouvelle base est calculée. Une technique bien adaptée à des excitations harmoniques est d'actualiser la base, tous les quarts ou les huitièmes de la période d'excitation. Ce critère fonctionne correctement pour des niveaux d'excitation relativement faibles. En effet, du moment où le niveau d'excitation est suffisamment important et fait apparaître des pseudos-périodes, ou même dans le cas où il s'agit d'une excitation aléatoire, ce critère peut influencer la précision de la réponse. En effet, l'instant de l'actualisation peut s'avérer faible en information sur l'état de la structure. La figure 2.3 montre la réponse sur un nœud d'une plaque, en déplacement relatif, vitesse et accélération pour plusieurs niveaux d'excitation à fréquence constante. La figure (a) montre des types de réponses où le critère proposé s'adapte bien, et la figure (b) présente les réponses où ce critère n'est pas bien adapté.

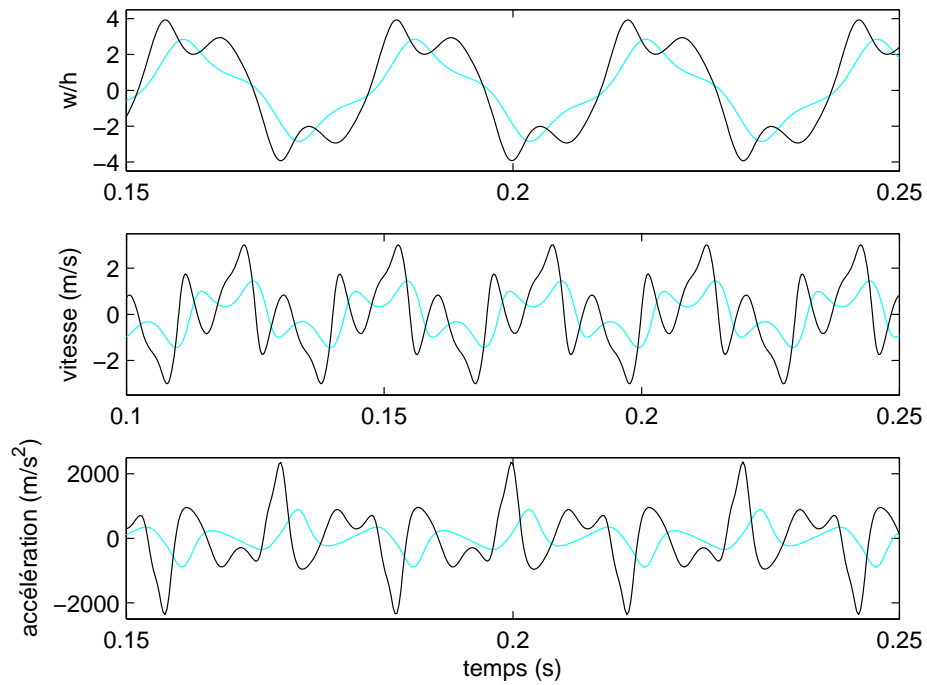
Pour des réponses telles la figure 2.3 (b) ou celle d'une excitation quelconque, un autre critère consiste à actualiser la base de réduction, en fonction du comportement de la structure. On propose d'actualiser la base de réduction à chaque demi-pseudo-période d'accélération, mais il sera toujours difficile de choisir le nœud à surveiller. D'un point de vue énergétique, cela revient à actualiser la base de réduction à chaque passage par l'extremum de l'énergie cinétique du système sans prendre en compte les extremums nuls. La figure 2.4 montre la réponse de la plaque avec une base de réduction actualisée. Un changement de marqueur indique une actualisation de la base.

2.2.5 Parallélisation

Avec l'avancée informatique, la technique de parallélisation est devenue un outil incontournable en calcul numérique. L'idée générale du calcul en parallèle est d'effectuer plusieurs calculs indépendants en simultané sur une machine multitâches (à plusieurs



(a) 1–2–5–10 N



(b) 20–50 N

Figure 2.3 – Réponse de la plaque pour plusieurs niveaux d'excitations.

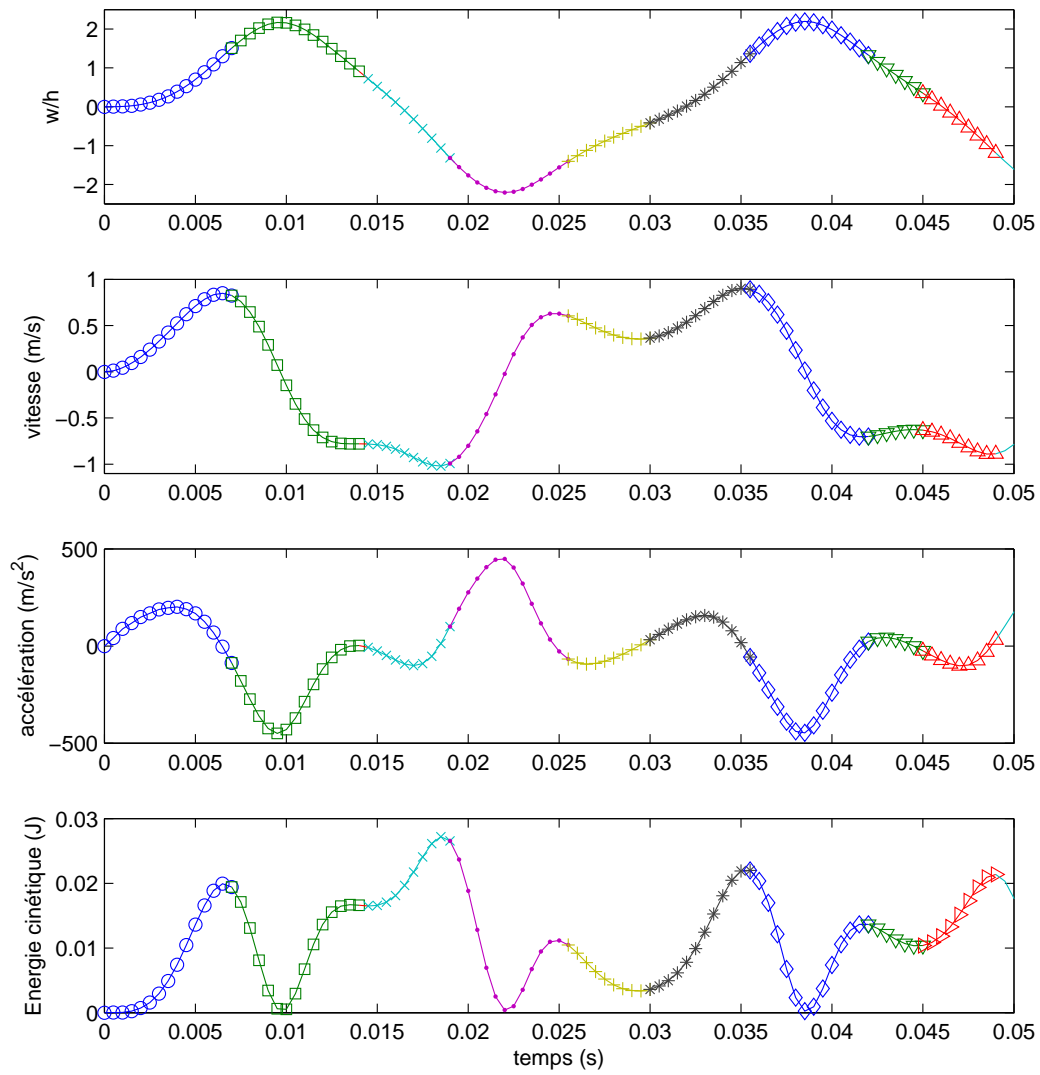


Figure 2.4 – Réponse de la plaque avec une base de réduction actualisée : chaque changement de marqueur correspond à une actualisation de la base.

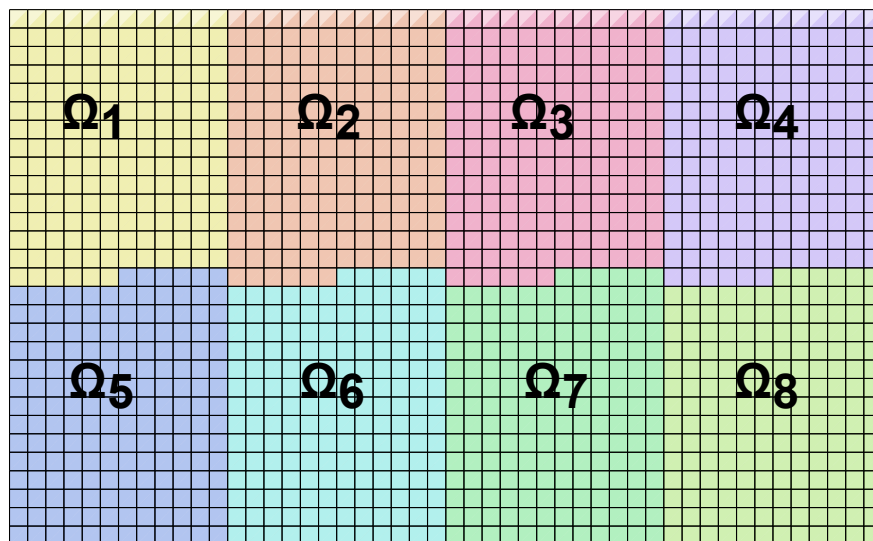


Figure 2.5 – Modèle éléments finis décomposé en sous domaines.

cœurs ou processeurs). L'évaluation de la force non-linéaire f_{nl} et de la matrice tangente K^t sont les procédures les plus coûteuses à chaque itération temporelle. Le calcul itératif des matrices élémentaires élément par élément et l'assemblage de ces matrices pour former la matrice globale du système, sont les causes directes de la longueur de la procédure. Or, les matrices élémentaires associées à f_{nl} et à K^t sont indépendantes entre elles. Par conséquent, il est possible de tirer profit du calcul parallèle.

La figure 2.5 représente un modèle élément finis d'un domaine Ω . Ce modèle est décomposé en n sous-domaines Ω_i , avec n le nombre de processeurs à disposition. Si p est le nombre d'éléments dans le domaine Ω , chaque Ω_i aura p/n éléments afin que la répartition des tâches de calcul soit équivalente entre les processeurs. Ainsi, le processeur i ($i = 1 \dots n$) calcule itérativement les matrices élémentaires du sous-domaine Ω_i pour former une sous-matrice globale A_i et une fois cette dernière calculée, elle est sommée avec les autres pour obtenir la matrice globale. La figure 2.6 représente un organigramme pour effectuer un calcul parallèle.

L'intégration du calcul parallèle est essentielle pour rendre efficace la méthode de réduction proposée. Plusieurs ouvrages décrivant les diverses architectures du parallélisme existent, pour plus d'information sur ces méthodes, on renvoie le lecteur à

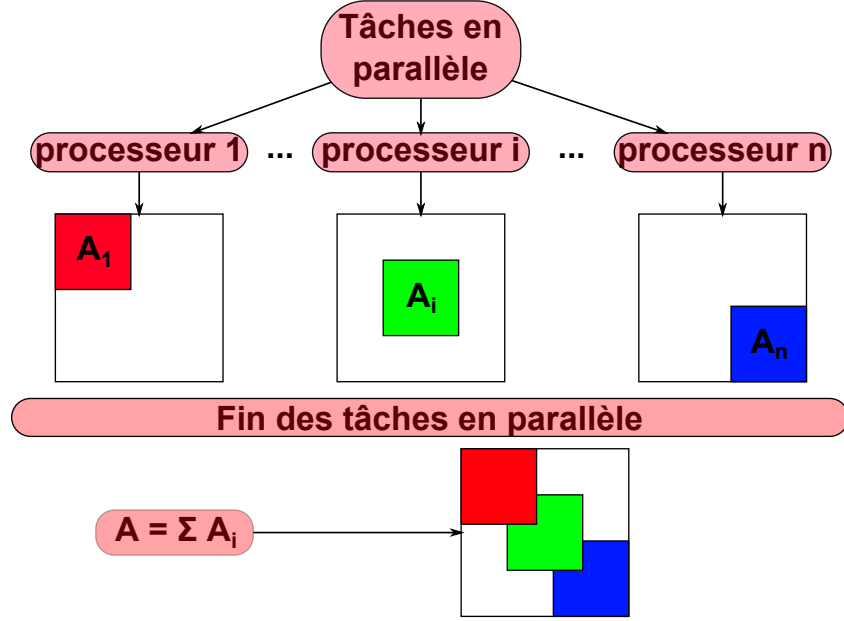


Figure 2.6 – Schéma du calcul parallèle.

l'ouvrage de Grama [36]. L'intérêt du calcul parallèle réside dans la diminution du coût de l'évaluation de f_{nl} et de K^t afin de rendre la réduction de modèle efficiente.

A titre illustratif, la figure 2.7 montre un diagramme des coûts des tâches à effectuer par rapport au coût total pour un calcul parallèle à 12 processeurs et un calcul non-parallèle. Il est clair qu'avec le calcul non parallèle la réduction de modèle n'agit pas sur le coût total du calcul alors qu'avec un calcul parallèle, le coût de la résolution du système linéaire devient important devant le coût total du calcul et la réduction de modèle a tout son intérêt.

2.2.6 Indicateurs temporels

Le moment temporel est un outil statistique qui permet de quantifier un signal temporel dans le but de comparer plusieurs réponses transitoires [42]. Le moment temporel M_i est défini par l'expression :

$$M_i = \int_{-\infty}^{+\infty} (t - t_s)^i (x(t))^2 dt, \quad (2.44)$$

où t_s correspond à un décalage temporel, i l'ordre du moment et $x(t)$ le signal à quantifier. Les moments temporels sont utilisés afin d'obtenir les moments centraux.

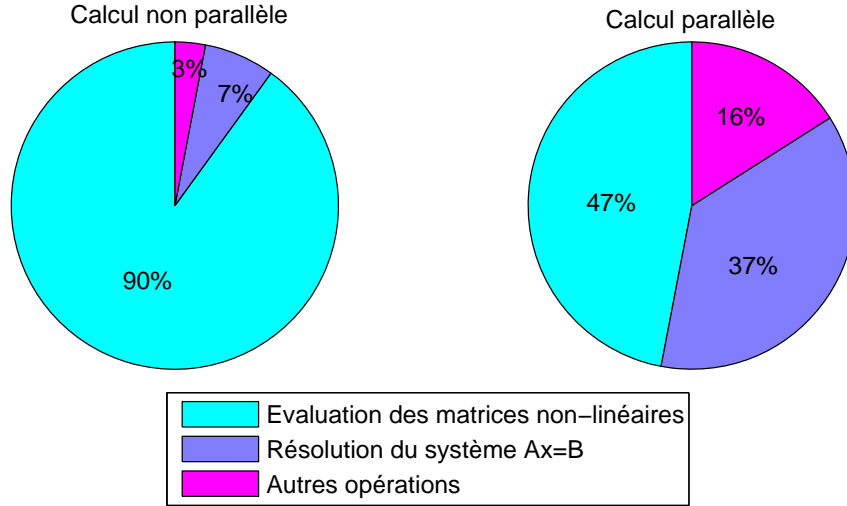


Figure 2.7 – Coût des opérations en fonction du coût total du calcul en %.

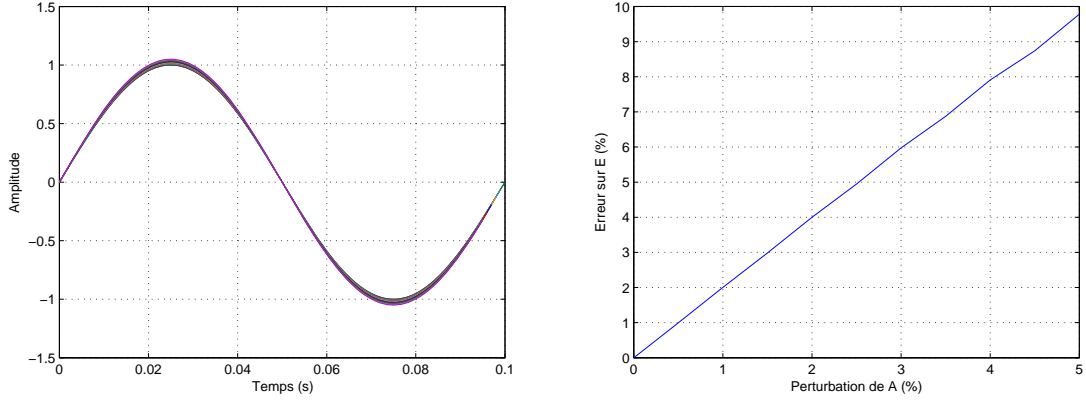
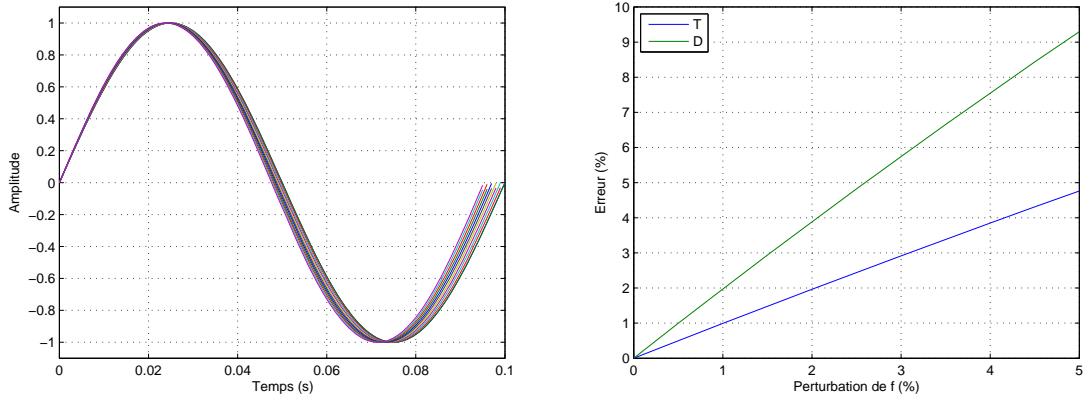
Pour un décalage temporel nul, ces moments centraux s'écrivent sous la forme :

$$\begin{cases} E &= M_0, \\ T &= \frac{M_1}{M_0}, \\ D^2 &= \frac{M_2}{M_0} - \left(\frac{M_1}{M_0} \right)^2. \end{cases} \quad (2.45)$$

E est l'énergie totale du signal, elle quantifie l'amplitude de la réponse, son unité est en $SI^2.s$ avec SI l'unité du signal en système international. T est le temps à mi-parcours de l'énergie du signal, elle quantifie la période de la réponse, son unité est en s . D^2 est la durée moyenne quadratique et son unité est en s^2 . Ainsi, dans les applications qui suivent, E sera utilisée pour identifier l'erreur au niveau de l'amplitude de la réponse ; T et D seront utilisés pour identifier l'erreur au niveau de la périodicité de la réponse.

Critère d'évaluation de l'erreur

L'erreur engendrée par la réduction de modèle est limitée afin de pouvoir conclure sur la validité du modèle réduit. On suppose qu'une erreur de $\pm 2\%$ sur l'amplitude ou la période de la réponse est admissible pour un modèle réduit comparé au modèle éléments finis.


 Figure 2.8 – Erreur relative du moment central E en fonction de ΔA_p , avec $\Delta f_p = 0$.

 Figure 2.9 – Erreur relative des moments centraux T et D en fonction de Δf_p , avec $\Delta A_p = 0$.

Soit un signal harmonique de la forme $x(t) = A \sin(2\pi ft)$ représenté sur une période $[0 : 1/f]$, avec A l'amplitude et f la fréquence du signal. Soit le signal perturbé $x_p(t) = (A + \Delta A_p) \times \sin(2\pi(f + \Delta f_p)t)$ sur la période $[0 : 1/(f + \Delta f_p)s]$, avec ΔA_p la perturbation de l'amplitude et Δf_p celle de la fréquence.

La figure 2.8 représente la variation de l'erreur du moment central E en fonction de la variation de l'amplitude ΔA_p pour $A = 1$. On constate une évolution linéaire de l'erreur avec une pente de 2. Ainsi, l'erreur relative admissible sur E pour valider le modèle réduit est de $\pm 4\%$. La figure 2.9 représente la variation des moments centraux T et D en fonction de la variation de la fréquence du signal Δf_p pour $f = 10\text{Hz}$. La

variation de l'erreur est toujours linéaire pour des petites perturbations et elle admet une borne admissible de $\pm 2\%$ sur T et de $\pm 4\%$ sur D .

2.2.7 Application

Afin d'illustrer l'efficacité de la méthode proposée, un exemple académique d'une plaque rectangulaire encastrée sur deux côtés (L_y) est présenté. Le tableau 2.2 présente les données géométriques et matérielles de cette structure.

Données	Valeurs	Unités
Dimensions ($L_x \times L_y$)	654×527	mm^2
Epaisseur (h)	1,5	mm
Module d'Young (E_0)	70.10^3	MPa
Coefficient de poisson (ν_0)	0.33	
Masse volumique (ρ_0)	$2,7.10^{-9}$	t/mm^3

Tableau 2.2 – Données du modèle éléments finis.

Chaque bord de la plaque est discrétisé en 24 éléments afin d'obtenir un maillage régulier. Un amortissement proportionnel à la raideur est introduit avec un coefficient α de 5.10^{-3} ($B = \alpha K_0$). Plusieurs types d'excitations sont étudiés afin de montrer l'intérêt et les performances de la méthode proposée. Le point d'excitation se situe en $x = 327mm$ et $y = 219,6mm$.

Excitation harmonique

Dans un premier temps, la plaque est excitée par une force harmonique à $20Hz$ au voisinage du premier mode de vibration. Plusieurs niveaux d'excitation sont imposés allant du cas faiblement non-linéaire au cas fortement non-linéaire. Le modèle éléments finis (**MEF**) est comparé aux modèles réduits par base modale non actualisée (**BM**) et par base actualisée par approximations combinées (**CA**).

Le choix de la base modale initiale est lié au nombre d'harmoniques supposées intervenir a priori. Si on considère que les harmoniques 1, 3 et 5 interviennent dans la réponse, la base T_f des vecteurs propres de nature 'flexion' doit contenir les modes dont

la fréquence est supérieure ou égale à 5 fois la fréquence de l'excitation (harmonique 1). Concernant les modes de membrane, ils sont de nature hautes fréquences, il est difficile d'adopter un critère similaire basé sur un choix a priori d'une fréquence de coupure. La règle empirique adoptée consiste à prendre un nombre de modes équivalent à celui des modes de flexion. Toutefois, il est possible de mettre en place un critère d'évaluation *a posteriori* basé sur l'évolution de l'erreur du modèle réduit.

La figure 2.10 montre les résultats en déplacement et en vitesse au point d'excitation. Sur cette figure, on observe que l'erreur engendrée par la réduction du modèle influe principalement sur l'amplitude de la réponse. La figure 2.11 montre l'erreur de l'énergie E du déplacement et de la vitesse en fonction du déplacement relatif maximal pour plusieurs niveaux d'excitation. La quantification de cette erreur est difficile à effectuer a priori mais le lien avec le niveau de non-linéarité, en l'occurrence le déplacement relatif montre le domaine de validité de la méthode proposée.

Il apparait que la méthode des approximations combinées (**CA**), comparée à la méthode de réduction par base modale (**BM**), prédit finement le comportement de la structure pour un certain seuil de non-linéarité ($w/h < 3.5$). Au-delà de ce seuil, cette méthode engendre une erreur non négligeable pour des comportements fortement non-linéaires. Mais, il a été constaté qu'il est toujours possible d'avoir un comportement plus précis en augmentant le nombre des vecteurs propres de type 'membrane' dans la base de réduction principale. La figure 2.10 montre que le déplacement relatif et la vitesse sont correctement prédits même pour des niveaux d'excitation très élevés ($200N$). En effet, l'erreur provient principalement de l'algorithme d'intégration temporelle qui prédit les accélérations avec des fluctuations qui varient aux alentours de la valeur exacte (figure 2.12). Ces fluctuations peuvent engendrer une erreur instantanée sur la vitesse ou le déplacement. Ce problème numérique est souvent rencontré avec les intégrations temporelles implicites et il est lié au critère de convergence de l'état dynamique.

Dans notre cas, l'état à t_{n+1} est prédit en fonction de l'état à t_n dans la base de réduction T_{n+1} ; or l'état à t_n a été prédit dans T_n . En quelque sorte, il y a une certaine discontinuité qui affecte principalement l'accélération sans modifier pour autant la vitesse et le déplacement.

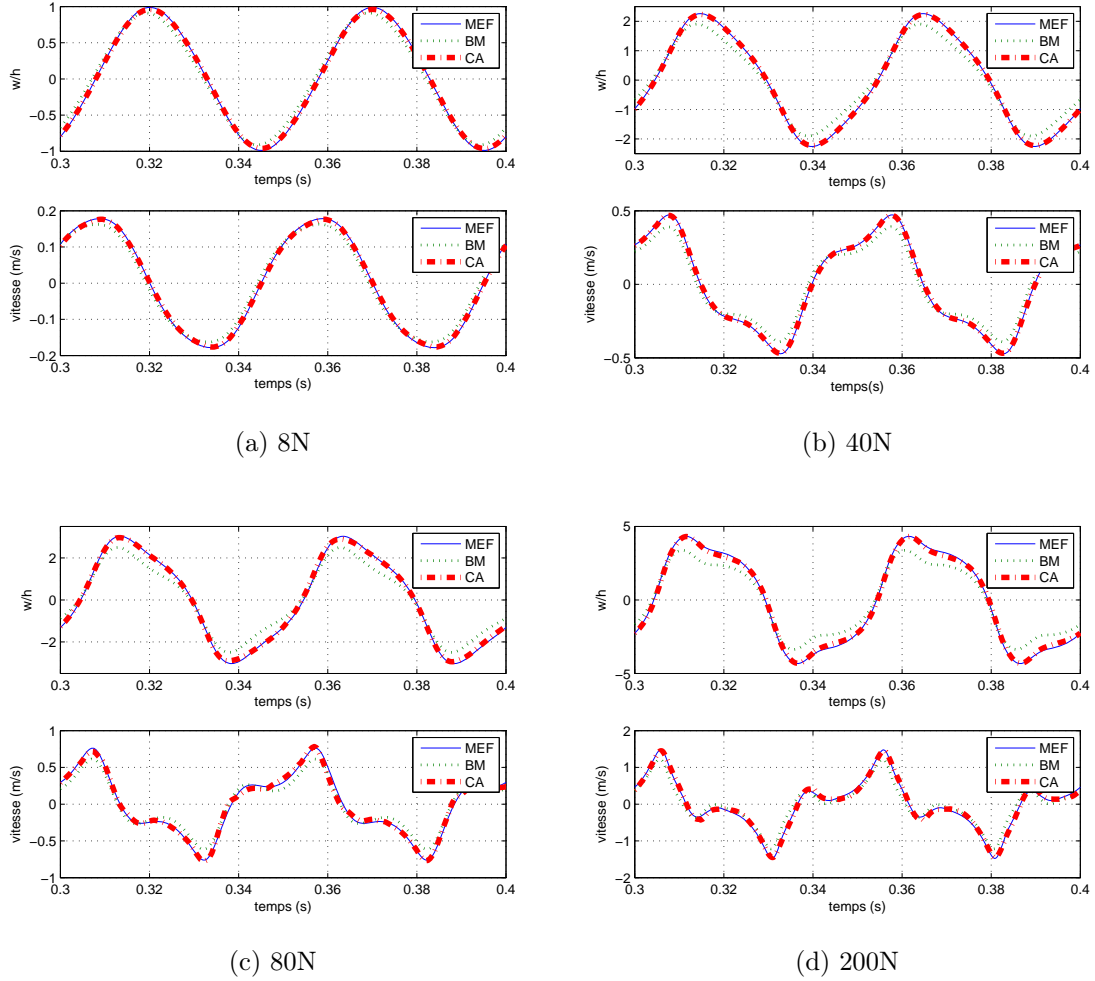


Figure 2.10 – Réponses en déplacement et en vitesse de la plaque à une excitation harmonique de $20Hz$ pour quatre niveaux d'excitation ; comparaison du modèle de référence **MEF** et des modèles réduits **BM** et **CA**.

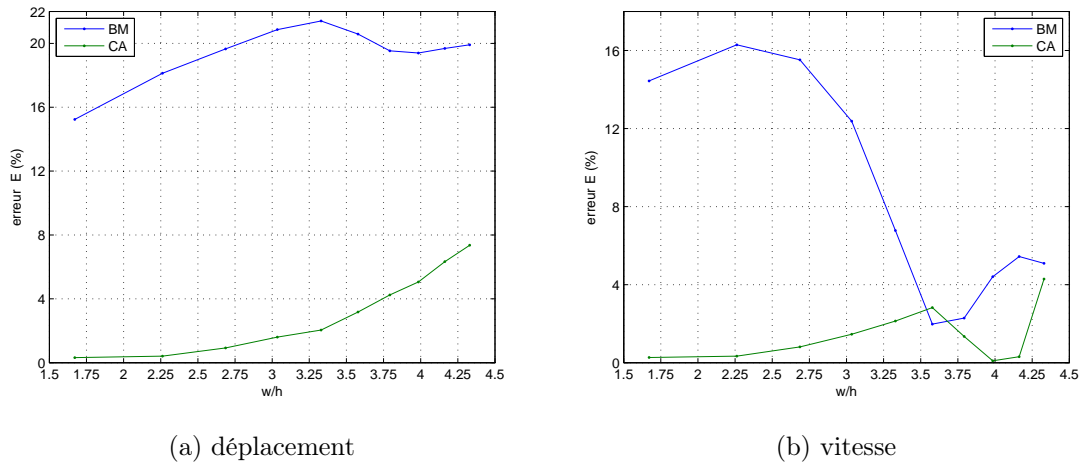


Figure 2.11 – Erreur relative du moment central E en fonction du déplacement relatif maximal pour plusieurs niveaux d'excitation.

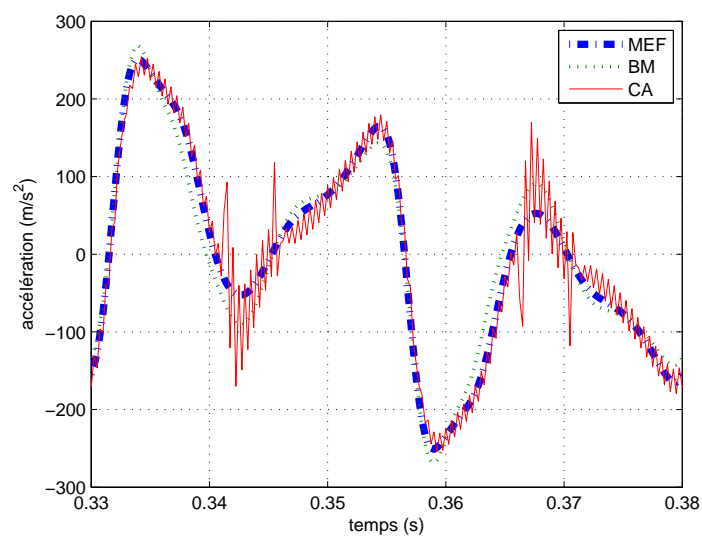


Figure 2.12 – Niveau d'accélération fluctuant par la méthode **CA** pour des non-linéarités élevées : $F = 140N$ et $w/h = 3.75$.

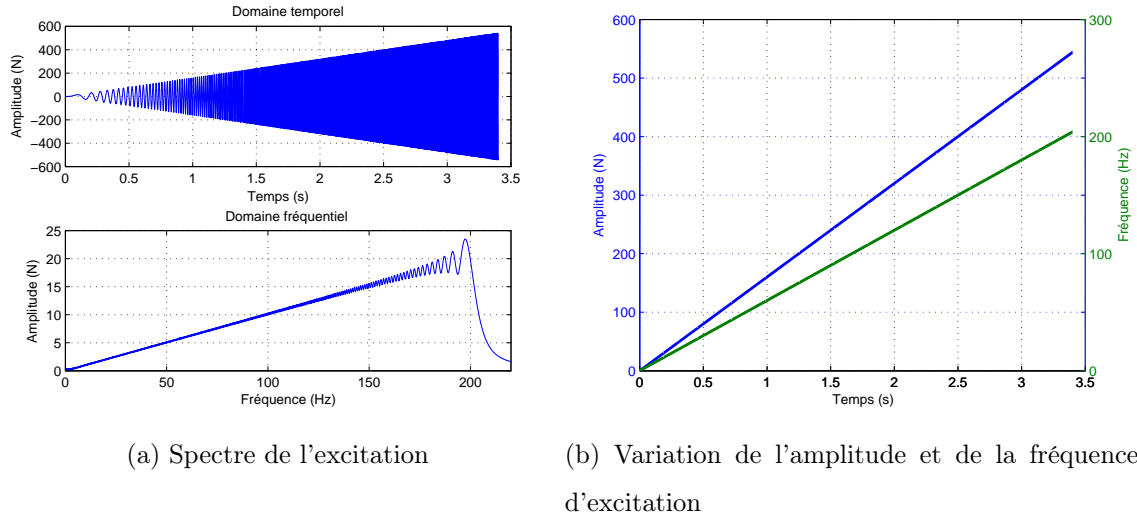


Figure 2.13 – Excitation sinus balayé avec une amplitude croissante.

Sinus balayé

Pour généraliser l'utilisation de la méthode des approximations combinées à d'autres types d'excitation, on se place dans le cas d'une excitation sinus balayé sous la forme $F(t) = 160t \sin(60\pi t^2)$ (figure 2.13), ceci sans changer les données de la structure. Cette excitation balaye plusieurs modes sur la bande fréquentielle $[0 - 200\text{Hz}]$ avec une amplitude croissante qui permet d'avoir un déplacement transversal relativement élevé afin de maintenir le comportement non-linéaire dans le temps.

La figure 2.14 présente les réponses de la structure en déplacement et en vitesse au point d'excitation obtenues en mettant en œuvre les méthodes **MEF**, **BM** et **CA**. Aux alentours de 1.1s on constate une chute d'amplitude qui est due à un passage fréquentiel $[60 - 80\text{Hz}]$ démunie de modes de vibration. Malgré cette chute d'amplitude, le déplacement transversal reste relativement important pour conserver un caractère non-linéaire. Le modèle réduit par la base modale (**BM**) prédit mal cette phase de réponse alors qu'avec la méthode des approximations combinées (**CA**) l'erreur reste très faible. La figure 2.15 montre l'erreur relative des moments centraux du déplacement et de la vitesse de la structure et confirme que la méthode **CA** conduit à une erreur réduite comparé à la méthode **BM**.

Comparé à l'excitation harmonique, le modèle **BM** engendre une plus faible erreur

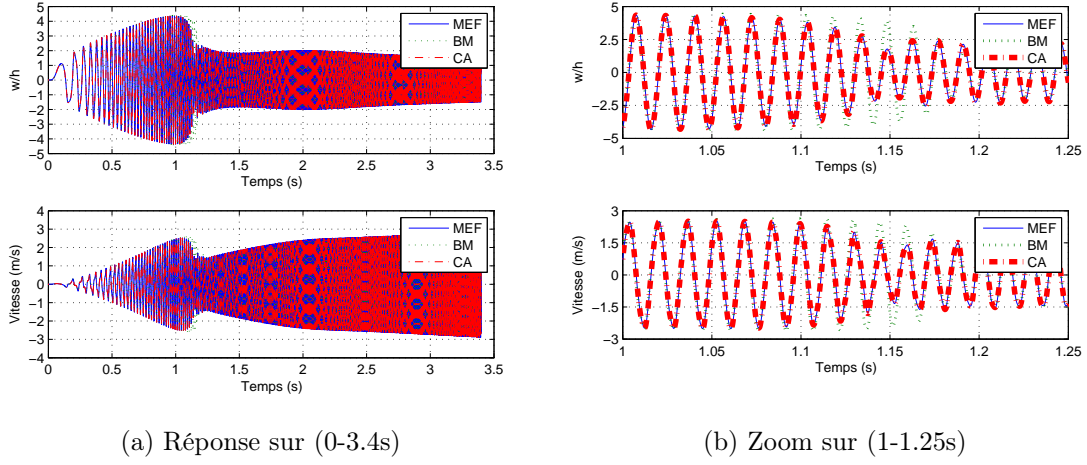


Figure 2.14 – Réponse temporelle à une excitation en sinus balayé.

sur E mais celle-ci reste beaucoup plus élevée que celle associée au modèle **CA**. D'autre part, le balayage fréquentiel du sinus balayé engendre une erreur sur T et D avec le modèle **BM**, qui n'apparaissait pas avec l'excitation harmonique. La méthode **CA** continue à prédire correctement les moments centraux.

Cette application permet de conclure que le modèle réduit par une base comportant des modes de flexion et de membrane permet d'obtenir des résultats limités en précision. Ceci s'explique par le comportement non-linéaire et le couplage entre les mouvements de membrane et de flexion qui ne sont pas pris en compte dans la base de réduction. L'enrichissement de cette base par des informations traduisant la non-linéarité et le couplage à travers la méthode des approximations combinées permet d'obtenir un modèle prédictif vis-à-vis du modèle élément finis complet.

Les applications montrent une erreur de prédiction relativement faible et qui augmente en fonction du degré de non-linéarité. Malgré la précision qu'elle affiche, cette méthode présente quelques inconvénients :

- la mise à jour de la base de réduction peut engendrer un temps de CPU non négligeable. Ceci dit, l'utilisation de techniques de parallélisation permet de surmonter cette difficulté,
- les fluctuations de l'accélération pour des non-linéarités élevées telles que celles présentées dans l'exemple de l'excitation harmonique peuvent conduire pour des

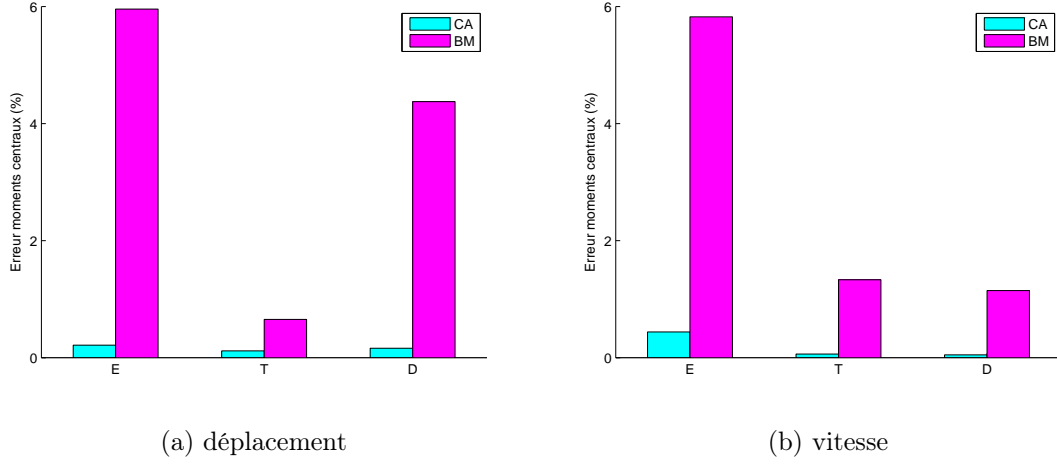


Figure 2.15 – Erreur relative des moments centraux pour une excitation en sinus balayé.

applications fortement non-linéaires à la divergence des résultats. Le choix des modes dans la base de réduction principale doit être bien adapté pour pallier cette difficulté.

2.3 Non-linéarités localisées

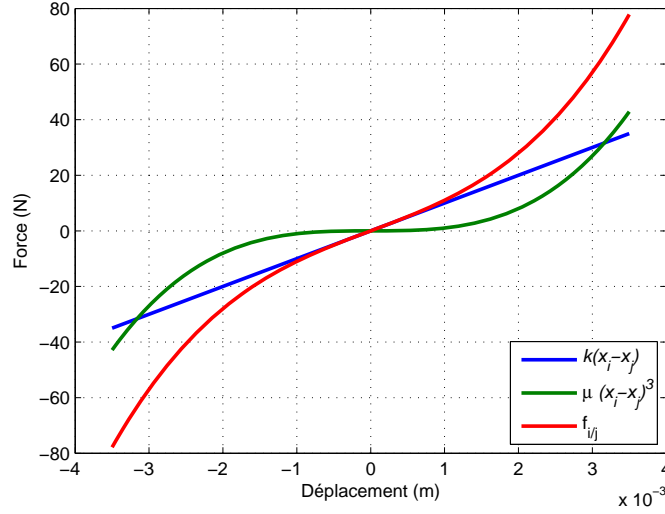
Le comportement non-linéaire local est un comportement fréquemment rencontré au niveau des liaisons mécaniques. Il est identifiable pour des niveaux d'excitation relativement élevés et il influence l'énergie de déformation ou l'énergie de dissipation du système. Cette étude se focalise sur les non-linéarités géométriques de type raideur.

2.3.1 Formulation discrète

Soit L , la liaison reliant la structure S_i à la structure S_j à travers les degrés de liberté (ddls) i et j . Soient x_i et x_j les déplacements des ddls i et j . L'action du ddl i sur le ddl j se traduit par l'équation

$$f_{i/j} = k(x_i - x_j) + \mu(x_i - x_j)^n, \quad (2.46)$$

où k désigne la raideur linéaire de la liaison, μ un terme perturbateur lié au comportement non-linéaire et n le degré de non-linéarité. μ et n sont les paramètres du comportement non-linéaire, et sont identifiables expérimentalement.


 Figure 2.16 – Variation des différents termes de $f_{i/j}$.

La figure 2.16 montre l'évolution des différents termes de l'équation (2.46) en fonction du déplacement relatif $(x_i - x_j)$ pour des valeurs de $k = 1.10^4 N/m$, $\mu = 1.10^9 N/m^3$ et $n = 3$. Le terme de perturbation agit sur la force $f_{i/j}$ à partir d'un certain niveau de déplacement relatif, en l'occurrence $|x_i - x_j| > 1.10^{-3}$. En concordance avec la non-linéarité répartie, il est nécessaire de connaître le niveau de non-linéarité pour choisir la méthode de réduction adaptée au modèle.

D'après l'équation (2.46), le comportement non-linéaire est une perturbation du comportement linéaire. Le problème non-linéaire est considéré comme un problème de réanalyse du modèle linéaire avec une modification équivalente à la perturbation engendrée par le terme non-linéaire.

2.3.2 Réduction de modèle

Le modèle réduit doit tenir compte de la modification apportée par la non-linéarité, sans nécessiter de résoudre des problèmes itératifs aux valeurs propres. La base de réduction est construite à partir du modèle linéaire initial et enrichie par des informations sur le comportement non-linéaire. Pour des faibles non-linéarités, lorsque l'excitation est harmonique, la réponse est a priori quasi-harmonique, une base modale judicieusement choisie peut satisfaire les conditions de prédictions (erreur relative dans la borne

admise comparé au modèle complet) si le nombre de degrés de liberté non-linéaires est petit devant la taille du système global. La base modale est choisie en fonction du spectre de l'excitation : pour une excitation dans le domaine d'intérêt $[0 - f_{max}]$, on utilise classiquement tous les modes situés dans la bande $[0 - 3f_{max}]$. Pour des comportements fortement non-linéaires, une méthode proposée dans [80] et inspirée des méthodes de sous-structuration, consiste à enrichir ces modes de vibrations linéaires par des résidus statiques (ou "modes contraints") sur les ddl non-linéaires traduisant ainsi l'action de la liaison S_i sur S_j . Cette méthode est présentée dans le paragraphe suivant.

2.3.3 Approximation par enrichissement de résidus statiques

L'hypothèse de petites déformations permet de considérer que malgré le comportement non-linéaire, le mouvement de la structure résulte toujours d'une somme de modes de vibrations, qui sont plus ou moins perturbés par rapport au modèle linéaire. Ces modes vérifient le problème linéarisé aux valeurs propres suivant :

$$(K^l + \Delta K^{nl} - \Lambda M) T = 0, \quad (2.47)$$

où Λ et T désignent respectivement la matrice spectrale et la base modale du problème aux valeurs propres. ΔK^{nl} est une matrice qui dépend du déplacement à un instant donné et qui décrit la modification issue du comportement non-linéaire comparé au comportement linéaire.

Comme mentionné précédemment, la résolution de l'équation (2.47) à chaque itération est coûteuse. En supposant que ces modes sont proches du problème non perturbé, il est possible d'introduire l'équation :

$$T = T_0 + \Delta T, \quad (2.48)$$

où T_0 désigne la base modale tronquée du modèle initial non perturbé et ΔT la perturbation de T_0 par rapport à T . On cherche alors la variation ΔT qui décrit cette perturbation. Le comportement non-linéaire est interprété comme une force extérieure qui agit sur le problème initial ; ΔT peut être assimilée aux modes contraints de la liaison entre les structures S_i et S_j . Ainsi, ΔT est approximée par une suite de vecteurs

où chacun représente la réponse statique du système pour une force unitaire appliquée à chaque degré de liberté non-linéaire :

$$\Delta T_i \approx K_0^{-1} F_i, (i = 1 \dots m). \quad (2.49)$$

m représente le nombre des ddl non-linéaires et F_i une force résiduelle unitaire sur le degré de liberté non-linéaire qui s'écrit sous la forme :

$$F_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.50)$$

La base de réduction T aura la forme :

$$T = [T_0 \quad \Delta T_1 \dots \Delta T_i \dots \Delta T_m], (i = 1 \dots m). \quad (2.51)$$

Avec cette approximation, la base T ne respecte plus la propriété d'unicité et d'orthogonalité des vecteurs. Une normalisation et une décomposition en valeurs singulières (*SVD*) sont nécessaires pour corriger ce défaut.

En comparaison avec la méthode des approximations combinées (paragraphe 2.2.4), cette méthode a pour avantage d'avoir une base de réduction constante qui la rend plus efficace. Ceci dit, son domaine de validité est restreint et n'englobe que le comportement non-linéaire au niveau local pour un faible nombre de ddl.

2.3.4 Applications

Afin de mettre en évidence l'intérêt de la méthode présentée, deux exemples d'application ont été choisis. Le premier utilise la même plaque que dans l'application précédente avec des conditions aux limites non-linéaires. Le deuxième exemple présente l'analyse d'une masse suspendue par des liaisons non-linéaires entre deux plaques identiques. Le modèle éléments finis (**MEF**) est comparé aux modèles réduits par base modale (**BM**) et par base modale enrichie par des résidus statiques (**BME**).

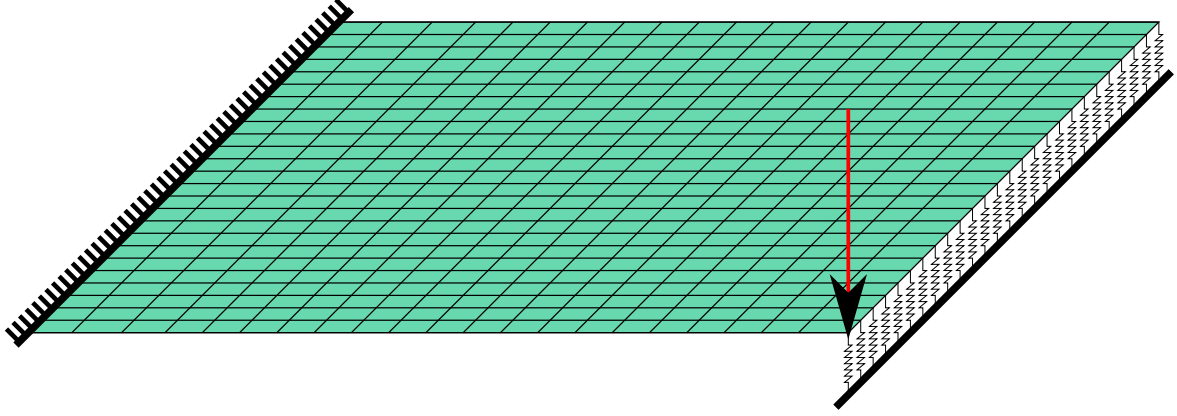


Figure 2.17 – Modèle éléments finis d’une plaque avec des liaisons non-linéaires sur une largeur.

Plaque en appui non-linéaire

Il s’agit du modèle éléments finis traité dans l’application précédente avec une épaisseur de plaque différente ($h = 3mm$). La plaque est encastree en $x = 0$ et en appui élastique non-linéaire en $x = L_x$ (figure 2.17). On considère des excitations en déplacement qui sollicitent la plaque à travers des raideurs cubiques non-linéaires ($k = 100N/m$, $\mu = 10^9 N/m^3$ et $n = 3$).

Une source d’excitation harmonique de fréquence $11Hz$ (voisinage de la première fréquence propre de vibration) est considérée afin d’étudier l’influence du niveau d’excitation. Le point d’excitation situé au coin de la plaque ($x = L_x$ et $y = 0$) est en vis-à-vis d’un ressort non-linéaire. Plusieurs simulations ont été réalisées en faisant varier l’amplitude de l’excitation. La figure 2.18 montre la réponse temporelle au point (L_x, L_y) en déplacement et en vitesse pour plusieurs niveaux d’excitation allant de $1N$ à $20N$. La figure 2.19 montre la variation de l’erreur relative du moment central E en déplacement et en vitesse comparé au modèle de référence (**MEF**) en fonction du niveau d’excitation.

D’après la figure 2.18, la réponse de la structure est quasi-linéaire pour un niveau d’excitation de $1N$. En-deçà de ce niveau, le modèle réduit **BM** prédit avec une faible erreur la réponse de la structure (figure 2.19). Pour des niveaux d’excitation plus élevés, l’erreur produite par ce modèle évolue rapidement alors que celle produite par le modèle **BME** reste très faible. En visualisant de plus près l’évolution de l’erreur du modèle

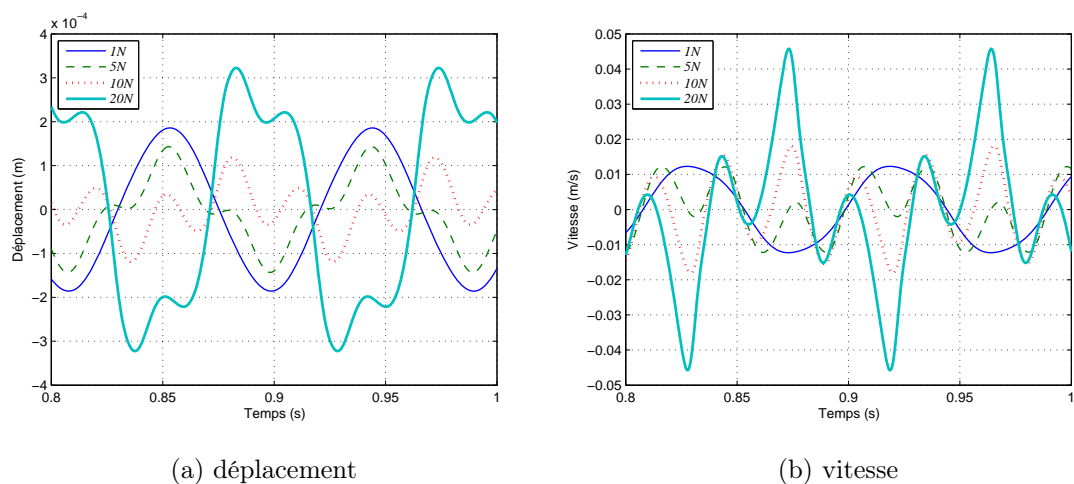


Figure 2.18 – Réponses temporelles en déplacement et en vitesse de la plaque encastrée–appuyée, pour différents niveaux d’excitation avec le modèle de référence **MEF**.

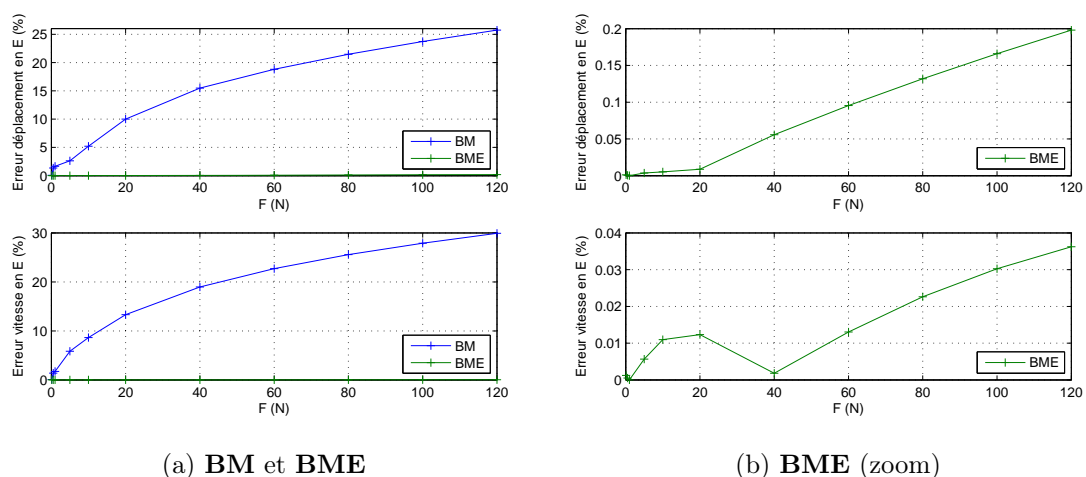


Figure 2.19 – Variation de l’erreur relative sur E en fonction du niveau d’excitation.

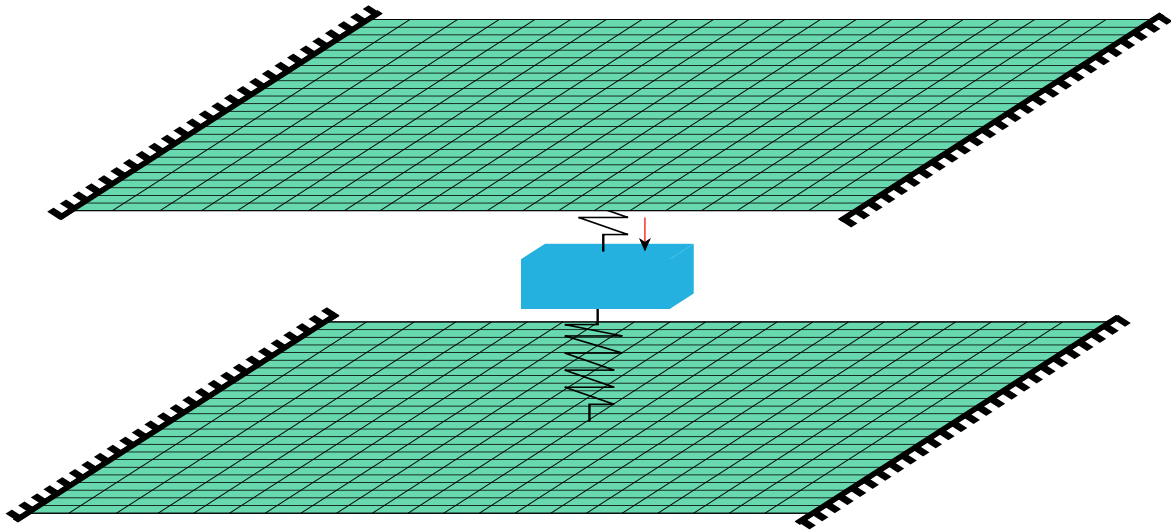
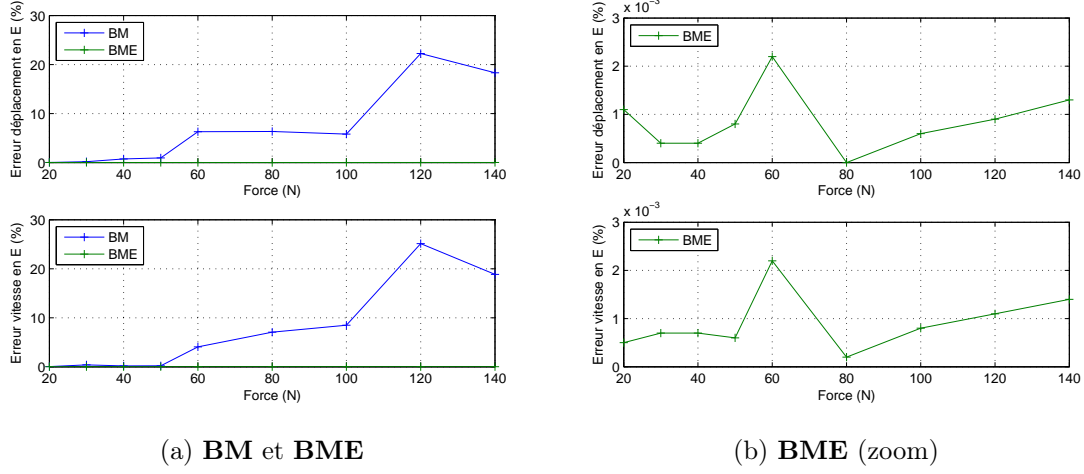


Figure 2.20 – Modèle d’une masse suspendue entre deux plaques avec des liaisons non-linéaires.

BME au niveau de la vitesse (figure 2.19), on constate qu’elle n’est pas croissante sur toute la bande. Ceci peut s’expliquer par le fait que la structure a un comportement raidissant jusqu’à $10N$ (amplitude maximale du déplacement décroissante pour une amplitude d’excitation croissante, figure 2.18) et qu’au delà, le comportement devient assouplissant. Il faut noter que l’erreur relative présentée sur les figures est en valeur absolue ; l’erreur algébrique à partir de $40N$ est négative, ainsi de 20 à $120N$ l’évolution de l’erreur est monotone.

Masse suspendue entre deux plaques

L’exemple suivant étudie le comportement d’une masse suspendue, à mi-distance entre deux plaques identiques. Contrairement à l’exemple précédent, les ddls non-linéaires ne sont plus indépendants entre eux. Les mêmes ressorts non-linéaires de l’exemple précédent sont utilisés pour lier le centre des deux plaques à la masse (poids de $1kg$, figure 2.20). Deux types d’excitation sont considérés : une excitation harmonique au voisinage d’un mode de vibration où l’influence du niveau d’excitation est étudiée, et une excitation large bande avec un sinus balayé permettant de solliciter plusieurs modes. L’excitation est appliquée sur la masse mobile.


 Figure 2.21 – Variation de l'erreur sur E en fonction du niveau d'excitation.

Excitation harmonique

Comme dans l'application précédente, la réponse à plusieurs niveaux d'excitation harmonique est étudiée afin de visualiser l'évolution de l'erreur engendrée par la réduction de modèle. La fréquence d'excitation est de $38Hz$, au voisinage d'un mode de vibration des plaques. La figure 2.21 montre la variation du moment central (E) en fonction du niveau d'excitation.

Cette application montre encore une fois la précision du modèle réduit **BME**. Contrairement à l'application précédente, la propagation d'erreur est différente du comportement non-linéaire qui est évolutif en fonction de l'amplitude de l'excitation. Toutefois, le niveau absolu de cette erreur est si faible ($< 3.10^{-3}\%$) que son évolution n'est pas significative.

Excitation sinus balayé

Les applications précédentes ont montré l'efficacité de la méthode proposée pour une excitation harmonique. Avec ce type d'excitation où la fréquence est imposée et fixe, il est difficile de conclure sur l'erreur au niveau de la périodicité de la réponse. Une excitation de type sinus balayé est alors proposée afin de tirer une conclusion globale sur la méthode de réduction proposée. Le point d'excitation est le même que l'application précédente et la force s'écrit sous la forme : $f(t) = 160t \sin(60\pi t^2)$.

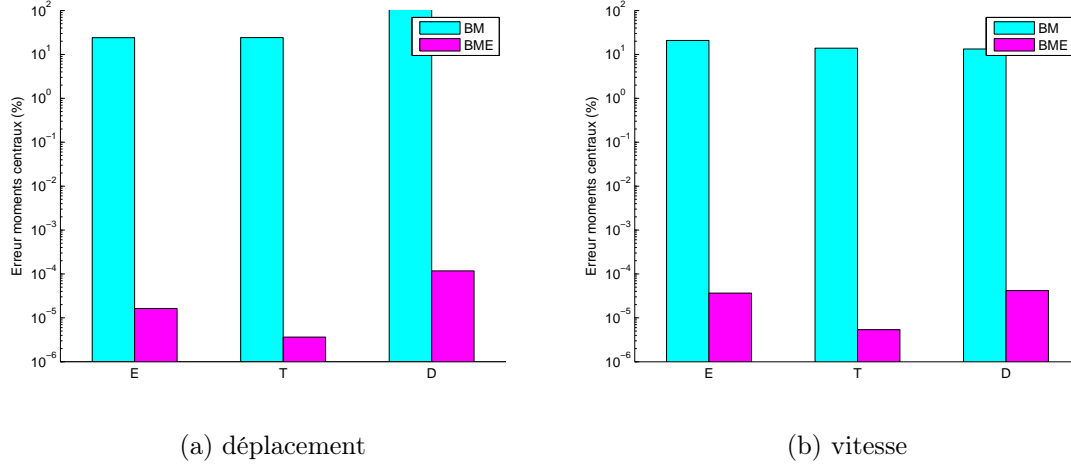


Figure 2.22 – Erreur des moments centraux pour une excitation en sinus balayé.

La figure 2.22 montre l'erreur relative des moments centraux des modèles **BM** et **BME** par rapport au modèle **MEF**. D'après cette figure, le modèle réduit par base modale prédit la réponse avec une erreur importante en amplitude et en période alors que le modèle **BME** prédit la réponse avec une erreur très faible ($<0.01\%$).

Le nombre de modes pris en compte dans la base de réduction de la méthode **BM** est calculé dans la bande allant jusqu'à $5 \times f_{max}$ et malgré cela on constate une convergence monotone, ce qui ne fait pas évoluer la précision des résultats. Quand au modèle **BME**, les simulations ont montré qu'il est possible de rendre ce critère moins exigeant en ne conservant que les modes appartenant à trois fois la bande fréquentielle d'intérêt. Cet exemple montre ainsi l'intérêt d'enrichir la base modale par des résidus statiques.

La méthode des approximations combinées (**CA**) n'a pas été appliquée dans le cas de non-linéarités localisées. En effet, la méthode **BME** a donné satisfaction dans les applications choisies et il n'y a pas dans ce cas d'intérêt à appliquer la méthode **CA**. Toutefois, il se peut que dans d'autres applications [37], la méthode **BME** ne soit plus aussi efficace, en particulier pour des comportements fortement non-linéaires, et dans ce cas précis la méthode **CA** constitue une bonne alternative à la méthode **BME**.

2.4 Conclusion

Ce chapitre dédié aux non-linéarités géométriques, rappelle la formulation du problème de vibration pour des non-linéarités réparties et localisées. Le comportement non-linéaire réparti est un comportement souvent rencontré en vibrations des structures minces et il influe sur le comportement de la structure à partir d'un certain niveau de déplacement (déplacement transversal relatif unitaire par rapport à l'épaisseur). Le comportement non-linéaire localisé caractérise les liaisons rigides non-parfaites entre les sous-structures.

Avec ces types de non-linéarités, la matrice de raideur du modèle élément finis devient dépendante de l'état de déplacement et il n'est plus suffisant d'utiliser les méthodes classiques en vibrations tel que le principe de superposition modale. La réduction de modèle, qui est un outil indispensable en calcul de structures, devient plus compliquée à mettre en œuvre.

Pour des non-linéarités réparties associées à un comportement faiblement non-linéaire, il est montré qu'une base modale judicieusement choisie, contenant des modes de membrane et de flexion conduit à des résultats satisfaisants en terme de précision. Pour un comportement fortement non-linéaire, la méthode des approximations combinées développée à l'origine pour des calculs de réanalyse, fournit des résultats satisfaisants. Dans cette approche, le comportement non-linéaire est considéré comme une perturbation du comportement linéaire ; cette perturbation est alors utilisée pour construire une base de réduction à partir de la base modale du système linéaire. Un critère lié au niveau de non-linéarité est proposé pour paramétrer la base de réduction (ordre de série de Taylor et nombre de modes à prendre en compte). Cependant, l'efficacité du modèle réduit est liée aux ressources informatiques disponibles. La technique de parallélisation est nécessaire pour rendre le modèle réduit efficient en terme de temps de calcul. L'application proposée a montré le niveau de précision de la méthode et son domaine de validité en fonction du degré de non-linéarité.

Pour des non-linéarités localisées, la méthode de réduction proposée consiste à construire une base modale enrichie par des résidus statiques issus de la réponse statique à des forces unitaires appliquées successivement sur les degrés de libertés non-linéaires.

Dans les applications proposées, cette méthode a montré un bon niveau de précision, même s'il reste difficile de borner a priori l'erreur engendrée par la réduction du modèle. Ce point reste encore un problème ouvert.

Les résultats obtenus permettent d'avoir des perspectives pratiques. Les méthodes de réduction proposées peuvent être adaptées au problème vibroacoustique en prenant en compte le couplage fluide-structure. Le chapitre suivant traite de la réduction de modèles en vibroacoustique non-linéaire.

Chapitre 3

Réduction de modèles en vibroacoustique non-linéaire

3.1 Introduction

Le comportement vibratoire d'une structure dépend du milieu dans lequel celle-ci est placée. Ainsi, la température influe sur les caractéristiques dynamiques et la nature du fluide environnant peut modifier considérablement ce comportement. Il est alors nécessaire de prendre en compte dans les modèles l'interaction entre la structure et le milieu, comme illustré dans ce chapitre dédié au couplage fluide-structure.

Le couplage fluide-structure est un phénomène qui se rencontre dans de nombreuses applications (génie civil, acoustique musicale, applications biomédicales, microsystèmes...). Le fluide couplé à la structure peut être en mouvement (dynamique) ou au repos (statique). Cette étude se focalise sur le cas des fluides statiques. On s'intéresse plus particulièrement au couplage vibroacoustique où le fluide est homogène, compressible et sa masse volumique est faible comparée à celle de la structure. Quelques éléments relatifs au couplage avec un fluide lourd seront présentés.

Les principaux inconvénients liés à la mise en œuvre de cette méthode sont les capacités numériques importantes qui sont requises pour le stockage des matrices et des vecteurs, ainsi que les temps de calcul conséquents liés à la résolution numérique des équations. Ce chapitre présente plusieurs méthodes de réduction de modèle adaptées à

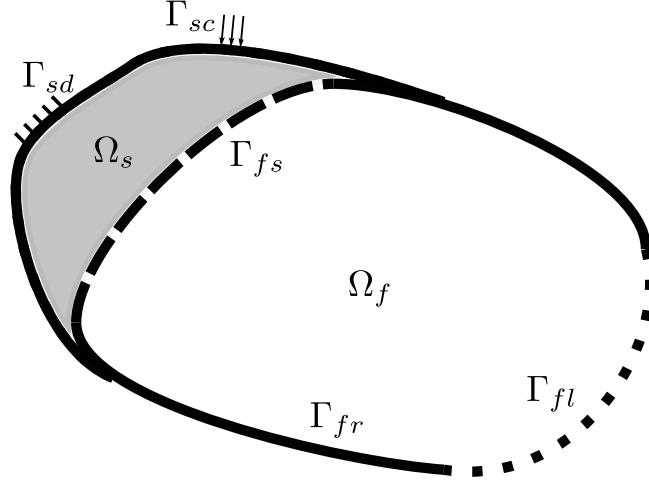


Figure 3.1 – Problème vibroacoustique

la vibroacoustique permettant de pallier ces inconvénients.

3.2 Formulations théoriques et état de l'art

Pour une vue détaillée sur l'interaction fluide-structure, le lecteur est invité à consulter les ouvrages de Morand et Ohayon [83], de Ohayon et Soize [95] et de Lesueur [73].

3.2.1 Mise en équation

On considère un fluide délimité par un volume Ω_f (figure 3.1), en contact avec une structure occupant un volume Ω_s . On désigne par Γ_{fs} la surface de contact entre les deux domaines. La structure est soumise à des conditions aux limites en termes de contraintes sur la surface Γ_{sc} et en termes de déplacements sur la surface Γ_{sd} . Le fluide admet une paroi souple délimitée par la surface Γ_{fl} ; il est en contact avec une paroi rigide délimitée par la surface Γ_{fr} .

Soit $M(x, y, z)$ un point du domaine $\Omega_s \cup \Omega_f$. Le comportement du fluide est décrit par sa pression totale $p_{tot}(M, t)$, sa vitesse $\mathbf{v}_f(M, t)$, sa masse volumique $\rho_{tot}(M, t)$ et sa vitesse de propagation c_0 . Les variables sont des fonctions du temps et de l'espace.

Le mouvement du fluide vérifie les équations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho_{tot} \left(\frac{\partial \mathbf{v}_f}{\partial t} + \mathbf{v}_f \cdot \text{div } \mathbf{v}_f \right) = -\nabla p_{tot} & \text{sur } \Omega_f, \end{array} \right. \quad (3.1a)$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial \rho_{tot}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_{tot} \mathbf{v}_f) = 0 & \text{sur } \Omega_f, \end{array} \right. \quad (3.1b)$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{p_{tot}}{p_0} = \left(\frac{\rho_{tot}}{\rho_0} \right)^\gamma & \text{sur } \Omega_f. \end{array} \right. \quad (3.1c)$$

L'équation (3.1a) est l'équation d'Euler traduisant la conservation de la quantité de mouvement. L'équation (3.1b) traduit la conservation de la masse et l'équation (3.1c) décrit la loi de comportement des gaz parfaits dans un milieu adiabatique où γ est le rapport des capacités calorifiques (1.4 pour l'air). L'hypothèse de petites perturbations permet de considérer que le fluide oscille autour d'une position d'équilibre. Les variables p_{tot} et ρ_{tot} s'écrivent alors sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} p_{tot}(M, t) = p_0 + p(M, t), \text{ avec } p_0 \gg p, \\ \rho_{tot}(M, t) = \rho_0 + \rho(M, t), \text{ avec } \rho_0 \gg \rho. \end{array} \right. \quad (3.2)$$

p_0 et ρ_0 sont respectivement la pression et la masse volumique du fluide au repos. Ces hypothèses permettent de réécrire les équations (3.1a), (3.1b) et (3.1c) sous la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}_f}{\partial t} = -\nabla p & \text{sur } \Omega_f, \end{array} \right. \quad (3.3a)$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 \text{div } \mathbf{v}_f = 0 & \text{sur } \Omega_f, \end{array} \right. \quad (3.3b)$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial p}{\partial t} & \text{sur } \Omega_f. \end{array} \right. \quad (3.3c)$$

En appliquant l'opérateur de divergence à l'équation (3.1a) et en dérivant l'équation (3.1b) par rapport au temps et en se servant de l'équation (3.3c) on retrouve l'équation de propagation de la pression qui s'écrit sous la forme :

$$\Delta p - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0, \text{ sur } \Omega_f. \quad (3.4)$$

Pour que ce problème soit bien posé, il faut prendre en compte les conditions aux limites du problème. Soit \mathbf{n} la normale extérieure au bord du fluide ; les conditions aux limites se traduisent par les équations suivantes :

- paroi rigide sur Γ_{fr} :

$$\frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} = \mathbf{0}, \quad (3.5)$$

- paroi libre sans contact sur Γ_{fl} :

$$p(M, t) = 0, \quad (3.6)$$

- paroi en mouvement (couplage) sur Γ_{fs} :

$$\frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} = -\rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \cdot \mathbf{n}. \quad (3.7)$$

- milieu infini – condition de Sommerfeld : le domaine est limité par un milieu fini occupé par une sphère de rayon r et vérifiant les équations suivantes :

$$\begin{cases} \lim_{r \rightarrow \infty} \left[r \left(\frac{\partial p(r)}{\partial r} + jkp(r) \right) \right] = 0, \\ \lim_{r \rightarrow \infty} p(r) = 0. \end{cases} \quad (3.8)$$

- les parois d’une cavité ont souvent une capacité d’absorption (amortissement) représentée par une fonction $Z(\omega)$ qui dépend de la pulsation ω et du comportement du matériau. Il est difficile d’utiliser cette fonction dans le domaine temporel ; les conditions aux limites sur une paroi Γ_a absorbante et couplée à une structure vibrante se traduisent par l’équation :

$$\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} + TF^{-1} \left(\frac{j\omega p(M, \omega)}{Z(M, \omega)} \right) = -\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \cdot \mathbf{n}. \quad (3.9)$$

Si la paroi n’est pas couplée à la structure, le terme $\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}$ est nul. Une alternative pour remédier à l’application d’une Transformée de Fourier inverse (TF^{-1}) est de rajouter le déplacement normal à Γ_r comme inconnue au problème et de considérer la dissipation comme étant proportionnelle à une raideur et à une masse [30].

3.2.2 Formulation variationnelle

On se place dans le domaine Ω_f . En introduisant l’espace \mathcal{C}_f des fonctions $\delta p(M)$, $M \in \Omega_f$ régulières, et l’espace $\mathcal{C}_f^0 \subset \mathcal{C}_f$ des δp nuls sur Γ_{fl} , la formulation variationnelle sur le champ de pression p s’énonce alors :

Trouver $p \in \mathcal{C}_f^0$, tel que $\forall \delta p \in \mathcal{C}_f^0$, on a :

$$-\int_{\Omega_f} \nabla p \nabla \delta p dV + \int_{\partial\Omega_f} \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} \delta p dS - \frac{1}{c_0^2} \int_{\Omega_f} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \delta p dV = 0. \quad (3.10)$$

En appliquant les conditions aux limites représentées par les équations (3.5) et (3.7), le terme $\int_{\partial\Omega_f} \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} \delta p dS$ décrivant le couplage peut s'exprimer sous la forme $-\rho_0 \int_{\Gamma_{fs}} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \cdot \mathbf{n} \delta p dS$ et l'équation (3.10) devient :

$$\int_{\Omega_f} \nabla p \nabla \delta p dV + \rho_0 \int_{\Gamma_{fs}} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \cdot \mathbf{n} \delta p dS + \frac{1}{c_0^2} \int_{\Omega_f} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \delta p dV = 0. \quad (3.11)$$

On s'intéresse maintenant au domaine Ω_s . Le problème élastodynamique couplé reprend les équations déjà introduites dans le paragraphe 1.2.1 du chapitre 1. La condition de continuité entre les domaines du fluide et de la structure impose un équilibre sur la surface de couplage Γ_{fs} entre la pression du fluide et les contraintes normales résiduelles au niveau de la structure. A cela, il faut ajouter la condition de compatibilité des déplacements normaux du fluide et de la structure sur Γ_{fs} .

En introduisant l'espace \mathcal{C}_s des fonctions $\delta \mathbf{u}(M, M \in \Omega_s)$ régulières, cinématiquement admissibles, et l'espace $\mathcal{C}_s^0 \subset \mathcal{C}_s$ des $\delta \mathbf{u}$ nuls sur Γ_{sd} , la formulation variationnelle s'énonce alors :

Trouver $\mathbf{u} \in \mathcal{C}_s^0$, tel que $\forall \delta \mathbf{u} \in \mathcal{C}_s^0$, on a :

$$\int_{\Omega} \underline{\sigma}(\mathbf{u}) : \underline{\varepsilon}(\delta \mathbf{u}) dV + \int_{\Omega} \rho_s \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \delta \mathbf{u} dV - \int_{\Gamma_{fs}} p \mathbf{n} \delta \mathbf{u} dS = \int_{\Gamma_{sc}} \mathbf{F} \delta \mathbf{u} dS. \quad (3.12)$$

Le terme $-\int_{\Gamma_{fs}} p \mathbf{n} \delta \mathbf{u} dS$ décrit l'action du fluide sur la structure.

3.2.3 Ecriture matricielle et problème aux valeurs propres

La résolution directe du système constitué par les équations (3.11) et (3.12) est quasi impossible dans la plupart des applications. On cherche alors une solution approchée, en projetant la solution \mathbf{u} dans un sous-espace de dimension N_s et la solution p dans un sous espace de dimension N_f . Cela conduit à un système matriciel de taille $N_s + N_f$ qui s'écrit :

$$\begin{cases} \delta U^T M_s \ddot{U} + \delta U^T K_s U - \delta U^T C P = \delta U^T F & \forall \delta U, \\ \delta P^T M_f \ddot{P} + \rho_0 \delta P^T C^T \ddot{U} + \delta P^T K_f P = 0 & \forall \delta P, \end{cases} \quad (3.13)$$

où :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \int_{\Omega} \rho_s \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \delta \mathbf{u} dV & \implies \delta U^T M_s \ddot{U}, \\ \int_{\Omega} \underline{\sigma}(\mathbf{u}) : \underline{\varepsilon}(\delta \mathbf{u}) dV & \implies \delta U^T K_s U, \\ \int_{\Gamma_{fs}} p \mathbf{n} \delta \mathbf{u} dS & \implies \delta U^T C P, \\ \int_{\Gamma_{sc}} \mathbf{F} \delta \mathbf{u} dS & \implies \delta U^T F, \\ \frac{1}{c_0^2} \int_{\Omega_f} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \delta p dV & \implies \delta P^T M_f \ddot{P}, \\ \int_{\Gamma_{fs}} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \delta p dS & \implies \delta P^T C^T \ddot{U}, \\ \int_{\Omega_f} \nabla p \nabla \delta p dV & \implies \delta P^T K_f P. \end{array} \right. \quad (3.14)$$

M_s et K_s sont les matrices de masse et de raideur de la structure et F le vecteur des forces extérieures appliquées. M_f et K_f sont les matrices dites de masse et de raideur associées au fluide. M_f est symétrique, définie positive et K_f est symétrique définie semi-positive. C est la matrice associée au couplage fluide-structure, elle est rectangulaire de taille $N_s \times N_f$. Le système (3.13) s'écrit finalement sous la forme matricielle suivante :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} M_s & 0 \\ \rho_0 C^T & M_f \end{bmatrix}}_M \underbrace{\begin{Bmatrix} \ddot{U} \\ \ddot{P} \end{Bmatrix}} + \underbrace{\begin{bmatrix} K_s & -C \\ 0 & K_f \end{bmatrix}}_K \underbrace{\begin{Bmatrix} U \\ P \end{Bmatrix}} = \underbrace{\begin{Bmatrix} F \\ 0 \end{Bmatrix}}. \quad (3.15)$$

Le choix de la formulation du problème vibroacoustique n'a pas été abordé dans cette partie. L'équation (3.15) peut être écrite avec différentes variables d'état (déplacement-pression, déplacement-potentiel de déplacement ou de vitesse, ...) où chaque formulation présente ses propres avantages et inconvénients. Le choix de la formulation déplacement-pression (U - P) est le plus répandu dans les codes industriels malgré le caractère non-symétrique des équations. Un rappel sur ces différentes formulations est mentionné dans l'ouvrage de Morand et d'Ohayon [83] et dans la thèse de Tran [120]. D'autre part, en ce qui concerne le choix de la discrétisation, bien que la méthode des éléments finis soit le choix le plus fréquent, elle présente certains inconvénients, notamment lorsque le rayonnement acoustique est un milieu infini. On retrouve dans

la littérature des applications qui traitent le problème en couplant la méthode des éléments finis pour la résolution du problème vibratoire à la méthode des éléments de frontière (BEM) pour la résolution du problème acoustique [26, 70].

Ces travaux se focalisent sur un problème acoustique en milieu fermé. Le choix de la méthode de discrétisation porte alors sur la méthode des éléments finis. Le problème aux valeurs propres associé à l'équation (3.15) s'écrit sous la forme :

$$\left(\begin{bmatrix} K_s & -C \\ 0 & K_f \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} M_s & 0 \\ \rho_0 C^T & M_f \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \varphi_s \\ \varphi_f \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (3.16)$$

Du fait du caractère non Hermitien des matrices K et M , le problème (3.16) admet des vecteurs propres de droite et de gauche distincts. Cependant, les valeurs propres ainsi que les vecteurs propres sont réels. Les vecteurs propres de gauche (indexés par un astérisque $*$) sont liés à ceux de droite par la relation suivante [129] :

$$\begin{Bmatrix} \varphi_s^* \\ \varphi_f^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varphi_s \\ \frac{1}{\lambda} \varphi_f \end{Bmatrix}. \quad (3.17)$$

φ_s et φ_f sont les parties dédiées respectivement à la structure et au fluide du vecteur propre global φ .

La résolution directe du problème aux valeurs propres de l'équation (3.16) est quasi impossible pour des systèmes de grandes tailles. En effet, le caractère non-symétrique de l'équation ne permet pas d'utiliser les algorithmes classiques de résolution de problèmes aux valeurs propres pour des systèmes matriciels de grande taille.

D'autre part, il s'avère qu'un préconditionnement des matrices pour les rendre du même ordre de grandeur est d'une importance capitale pour obtenir des solutions précises avec une convergence rapide. Maess et Gaul [79] proposent des coefficients déterminés en fonctions de la norme de Frobenius des matrices, soit :

$$\begin{cases} a = \sqrt{\frac{\|K_s\|_F}{\|M_f\|_F}} & \text{et} & b = \sqrt{\frac{\|M_s\|_F}{\|K_s\|_F}}, \\ C_k = aC, & C_m = bC, & \widehat{K}_f = abK_f, & \text{et} & \widehat{M}_f = abM_f. \end{cases} \quad (3.18)$$

Le nouveau problème aux valeurs propres qui ne présente plus un mauvais condition-

nement s'écrit sous la forme :

$$\left(\begin{bmatrix} K_s & -C_k \\ 0 & \widehat{K}_f \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} M_s & 0 \\ \rho_0 C_m^T & \widehat{M}_f \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \phi_s \\ \phi_f \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (3.19)$$

Les valeurs propres associées aux problèmes (3.16) et (3.19) sont identiques, ϕ_s et ϕ_f sont les vecteurs propres associés au problème (3.19). Les vecteurs propres associés au problème (3.16) sont déterminés en utilisant le facteur de préconditionnement a :

$$\begin{Bmatrix} \varphi_s \\ \varphi_f \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \phi_s \\ a\phi_f \end{Bmatrix}. \quad (3.20)$$

Dans la suite du manuscrit, les équations utilisées sont les équations dédiées au problème non préconditionné. L'adaptation du problème préconditionné se fait automatiquement en identifiant terme à terme les équations (3.16) et (3.19).

3.2.4 Réduction de modèle

Malgré le bon conditionnement du nouveau problème, le caractère non-symétrique du système à résoudre ainsi que sa grande taille liée à la discrétisation par éléments finis complexifient la résolution numérique de celui-ci. Le modèle réduit se présente ainsi comme un passage obligatoire pour obtenir une solution approchée du problème complet. Cependant, la forme non-symétrique du problème complique la construction de la base de réduction associée au modèle. L'équation homogène associée au problème (3.15) s'écrit sous la forme :

$$\left(\begin{bmatrix} K_s & -C \\ 0 & K_f \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} M_s & 0 \\ \rho_0 C^T & M_f \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} U \\ P \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (3.21)$$

Les valeurs propres du problème (3.21) sont réelles, mais la forme non-symétrique du problème alourdit la résolution. Plusieurs techniques existent pour contourner cette difficulté. Le plus souvent, les bases modales du problème découplé fluide-structure sont utilisées pour la construction du modèle réduit. Ces bases vérifient les équations suivantes :

$$\begin{cases} (K_s - \lambda_s M_s) \varphi_s^0 = 0, \\ (K_f - \lambda_f M_f) \varphi_f^0 = 0. \end{cases} \quad (3.22)$$

Le déplacement physique et la pression acoustique sont ainsi projetés sur ces bases de sorte que :

$$\begin{Bmatrix} U \\ P \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} T_s^0 & 0 \\ 0 & T_f^0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_s \\ q_f \end{Bmatrix} = T^0 q, \quad (3.23)$$

où q_s désigne le déplacement généralisé, q_f la pression généralisée, et où T_s^0 et T_f^0 sont respectivement la base des vecteurs propres φ_s^0 et φ_f^0 .

Ce choix est loin d'être performant en terme de convergence et on cherche à enrichir les bases découplées avec des vecteurs contenant des informations sur le couplage fluide-structure. A titre d'exemple, Ohayon [94] propose d'utiliser la réponse statique de la cavité sous une déformation de la surface de contact. Tran [121] propose d'enrichir la base fluide par la contribution des modes structures pour les fluides légers et de rajouter la contribution statique des modes fluides dans le cas général.

Une autre méthode proposée par Bobillot et Balmès [14] consiste à enrichir par des résidus de forces traduits en déplacements. Ces résidus vérifient l'équation suivante :

$$f_{res} = KT^0 c - MT^0 c \Lambda, \quad (3.24)$$

où Λ et c sont les valeurs propres et les vecteurs propres associés au problème :

$$(\bar{K} - \Lambda \bar{M}) c = 0 \quad (3.25)$$

avec :

$$\bar{K} = T^{0T} K T^0 \text{ et } \bar{M} = T^{0T} M T^0. \quad (3.26)$$

Ces résidus sont traduits par la suite en déplacement et en pression résiduels en calculant la réponse statique du système découplé :

$$\begin{Bmatrix} U_{res} \\ P_{res} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_s^{-1} & 0 \\ 0 & K_f^{-1} \end{bmatrix} f_{res} \quad (3.27)$$

Ces réponses sont ajoutées aux vecteurs propres du système découplé (T_s^0 et T_f^0) pour obtenir une nouvelle base T formé de T_s et T_f . La convergence du nouveau système s'appuie sur les indicateurs ε_s et ε_f :

$$\begin{cases} \varepsilon_s = \frac{U_{res}^T K_s U_{res}}{T_s^T K_s T_s}, \\ \varepsilon_f = \frac{P_{res}^T K_f P_{res}}{T_f^T K_f T_f}, \end{cases} \quad (3.28)$$

la procédure est itérée tant que ceux-ci sont supérieurs à une valeur limite imposée a priori. Cette méthode est comparée par la suite à la méthode proposée dans ces travaux.

Une alternative à l'enrichissement de la base modale du problème découplé consiste à symétriser le problème (3.21) [49]. L'inconvénient de cette technique réside dans la gestion de la mémoire du fait de la nature des matrices qui ne présentent plus un caractère creux.

3.2.5 Réduction de modèle non-linéaire

Les méthodes de réduction présentées jusqu'à présent ne sont pas adaptées aux problèmes non-linéaires. Le chapitre 1 rappelle les méthodes dédiées à ce type de problème. On peut les classer en trois catégories :

- les bases de Ritz actualisées,
- la décomposition propre orthogonale (POD),
- les modes normaux non-linéaires (NNM).

Cependant, le caractère couplé non-symétrique du problème vibroacoustique ne permet pas l'application directe de ces méthodes d'une manière explicite. Amabili et Touzé [2, 3] adaptent la POD et les NNM au problème couplé fluide-structure. Ils étudient un réservoir cylindrique rempli d'eau et considèrent un comportement non-linéaire structural en grands déplacements. Le problème couplé électro-mécanique admet quelque similitude avec le problème couplé fluide-structure. Avec les nano-structures piézoélectriques, Lazarus [71] utilise une base de Ritz pour réduire son modèle non-linéaire. D'autres applications qui traitent les modèles réduits des problèmes de couplage non-linéaire existent mais elles sont souvent dédiées à la dynamique des fluides et à l'aérodynamique [75, 77]. La POD demeure la méthode la plus répandue dans ce domaine.

Ainsi, dans ce chapitre nous proposons d'adapter les méthodes de réduction introduites dans le chapitre précédent au problème couplé. Deux applications non-linéaires seront traitées :

- la non-linéarité géométrique en grands déplacements appliquée aux structures minces,
- la non-linéarité géométrique localisée.

3.2.6 Conclusion

Dans ce paragraphe, un rappel de la formulation du problème acoustique est présenté. La formulation matricielle a permis de comprendre les méthodes de réduction proposées dans la littérature. Elles sont généralement basées sur les vecteurs propres du problème découplé enrichis par des résidus statiques. Un rappel des méthodes de réduction dédiées aux problèmes couplés dans un contexte non-linéaire est également présenté. Dans la suite du chapitre, une nouvelle approche pour la synthèse modale du problème vibroacoustique linéaire est présentée ainsi qu'une méthode de réduction dédiée au problème vibroacoustique non-linéaire.

3.3 Une nouvelle approche pour la synthèse modale de problèmes vibroacoustiques linéaires

La méthode des approximations combinées a montré dans le chapitre 2 ainsi que dans d'autres applications un grand intérêt pour les problèmes de réanalyses approchées [20, 21]. La forme matricielle du problème vibroacoustique en formulation U - P permet de considérer le problème couplé comme une modification du problème découplé. L'équation homogène s'écrit alors sous la forme :

$$[(K_0 + \Delta K) - \omega^2 (M_0 + \Delta M)] X = 0, \quad (3.29)$$

où,

$$\begin{aligned} K_0 &= \begin{bmatrix} K_s & 0 \\ 0 & K_f \end{bmatrix}, \Delta K = \begin{bmatrix} 0 & -C \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ M_0 &= \begin{bmatrix} M_s & 0 \\ 0 & M_f \end{bmatrix}, \Delta M = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \rho_0 C^T & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Les paramètres de la méthode des approximations combinées (r_0 et B_0) s'écrivent alors sous la forme :

$$\begin{cases} B_0 = K_0^{-1} \Delta K = \begin{bmatrix} 0 & -K_s^{-1} C \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ r_0 = K_0^{-1} (M_0 + \Delta M) \varphi_0. \end{cases} \quad (3.31)$$

La forme creuse sur la diagonale de la matrice B_0 ainsi que sur un bloc de sa partie extra-diagonale ne permet pas de profiter de l'intérêt de la CA : à l'ordre 1, la sous-base dédiée à la partie fluide est nulle et à partir de l'ordre 2 le développement est nul. Ainsi, l'application de la méthode des approximations combinées dans sa version originale n'est pas envisageable pour le problème vibroacoustique.

3.3.1 Une variante de la méthode des approximations combinées

L'idée consiste alors à perturber les matrices K_0 et ΔK par un décalage spectral afin de ne plus avoir le caractère creux, sans perturber le problème initial. Cette perturbation se traduit par l'équation :

$$[(K_0 + \mu_K M_0) + (\Delta K + A) - (\omega^2 + \mu_M) (M_0 + \Delta M)] X = 0. \quad (3.32)$$

μ_K et μ_M sont des scalaires arbitraires, A est une matrice qui peut s'écrire sous deux formes distinctes. Suivant la forme choisie, μ_K , μ_M et A seront liés d'une manière différente :

$$\begin{cases} \mu_K = \mu_M, \text{ et } A = \mu_K \Delta M & \forall \mu_K \neq 0, \text{ ou} \\ \mu_M = 0, \text{ et } A = -\mu_K M_0 & \forall \mu_K \neq 0. \end{cases} \quad (3.33)$$

Ainsi, les nouveaux paramètres de la CA s'écrivent sous la forme :

$$\begin{cases} B_0 = (K_0 + \mu_K M_0)^{-1} (\Delta K + A), \\ r_0 = (K_0 + \mu_K M_0)^{-1} (M_0 + \Delta M) T_0. \end{cases} \quad (3.34)$$

Il est intéressant de noter que si l'on considère le cas où $\mu_K = \mu_M$ et si l'on choisit pour μ_K l'inverse de la masse volumique du fluide, on retrouve une matrice B_0 symétrique.

Les paramètres B_0 et r_0 vont permettre de construire une base de projection T qui va dépendre de l'ordre n du développement de la série de Taylor :

$$\begin{cases} T = [r_0 \ r_1 \cdots r_i \cdots r_n] & i = 1 \cdots n, \\ r_i = -B_0 r_{i-1}. \end{cases} \quad (3.35)$$

Une fois T déterminée et décomposée en valeurs singulières, on résoud le problème aux valeurs propres des matrices globales projetées sur T :

$$\begin{cases} (\bar{K} - \Lambda \bar{M}) c = 0, \\ \bar{K} = T^T K T \text{ et } \bar{M} = T^T M T. \end{cases} \quad (3.36)$$

Les valeurs propres (Λ) du problème réduit sont celles associées au problème complet et les vecteurs propres Φ sont déterminés en projetant c sur T :

$$\Phi = Tc. \quad (3.37)$$

3.3.2 Application

La synthèse modale du cas-test d'une cavité parallélépipédique remplie d'air (figure 3.2) est présentée. Cette cavité admet cinq parois rigides et une paroi souple représentée par une plaque appuyée sur ses bords. Les données du modèle sont listées dans le tableau 3.1. Le modèle éléments finis admet 3750 degrés de liberté pour la structure et 8125 pour le fluide.

Les résultats obtenus avec la méthode proposée sont comparés à ceux obtenus avec :

- la méthode des itérations sur le résidu proposée par Bobillot et Balmes [14] et décrite précédemment,
- la méthode utilisée par le logiciel ANSYS appelée la méthode des dérivées en fréquence qui utilise un ensemble de vecteurs de Krylov [65].

Les études sont menées sur la bande fréquentielle $[0 - 900 \text{ Hz}]$. Le modèle complet doit contenir environ 60 modes dans cette bande. Les valeurs propres et les vecteurs propres sont obtenus de la façon suivante :

- Les vecteurs propres et les valeurs propres retrouvés par la méthode des approximations combinées sont issus de 34 vecteurs propres de la structure in vacuum

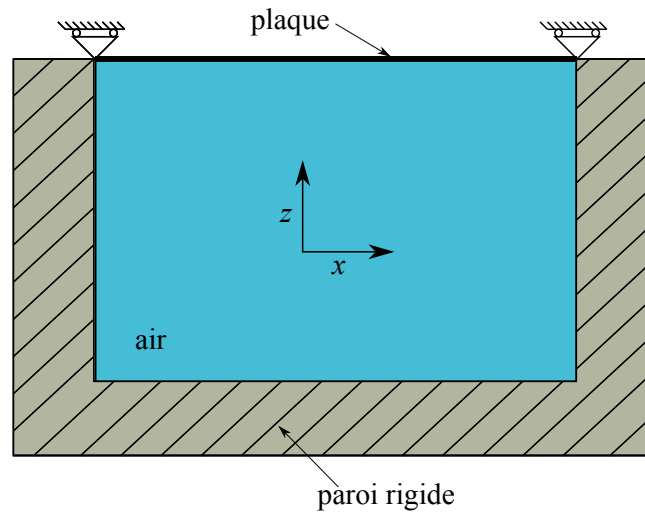


Figure 3.2 – Coupe en y de la cavité

Structure	Dimensions de la plaque (mm^3)	$654 \times 527 \times 3$
	Masse volumique (kg/m^3)	2700
	Module d'Young (MPa)	70.10^3
	Coefficient de poisson	0.33
Fluide	Dimensions de la cavité (mm^3)	$654 \times 527 \times 600$
	Masse volumique (kg/m^3)	1.2
	Célérité (m/s)	340

Tableau 3.1 – Données du modèle

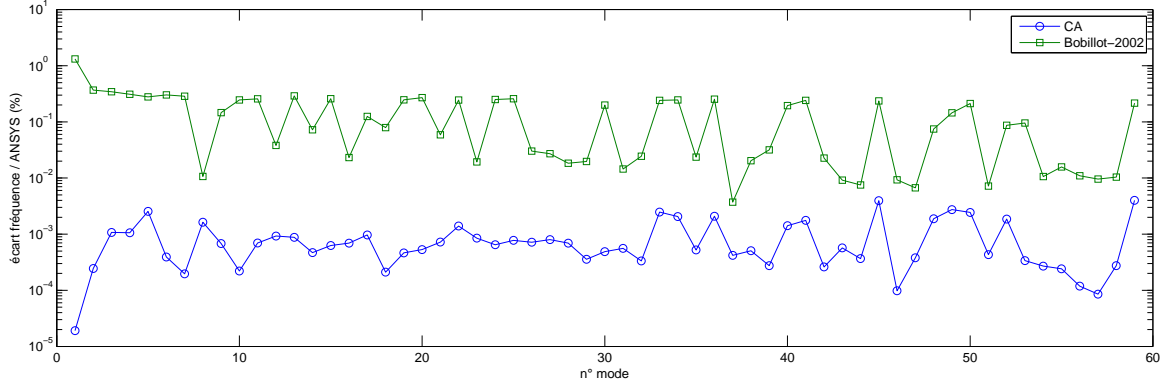


Figure 3.3 – Ecart fréquentiel avec ANSYS

et de 59 vecteurs propres du fluide à paroi rigide. En effet, ces modes sont ceux qui appartiennent à la bande d'intérêt $[0 - 900 \text{ Hz}]$. Les simulations ont montré que le développement de la série de Taylor jusqu'à l'ordre 2 ou 3 suffit pour la convergence des vecteurs.

- Les vecteurs propres et les valeurs propres calculés par la méthode des itérations sur le résidu sont issus de 60 vecteurs propres de la structure in vacuum et du fluide à paroi rigide.
- L'algorithme qui permet d'obtenir les vecteurs propres et les valeurs propres sous ANSYS est une « boîte noire ».

La figure 3.3 représente l'écart fréquentiel entre les fréquences propres obtenues par ANSYS et les deux autres méthodes. Les figures 3.4 et 3.5 représentent la diagonale sur les MAC des déplacements transversaux et de la pression acoustique entre les différents modèles. Sur ces trois figures, il apparaît que les résultats obtenus avec ANSYS et avec la méthode des approximations combinées sont très similaires et diffèrent légèrement de ceux obtenus par la méthode des itérations sur le résidu. Cet écart est surtout visible sur le MAC des vecteurs propres en pression (figure 3.5) où la différence atteint 25% sur certains modes.

Les résultats obtenus jusqu'à présent ont permis de comparer les modèles entre eux mais les critères de comparaison utilisés ne permettent pas de se prononcer sur la validité des modèles. Afin de pouvoir favoriser un modèle plutôt qu'un autre, un critère basé sur l'énergie de déformation résiduelle issue du résidu de force engendré

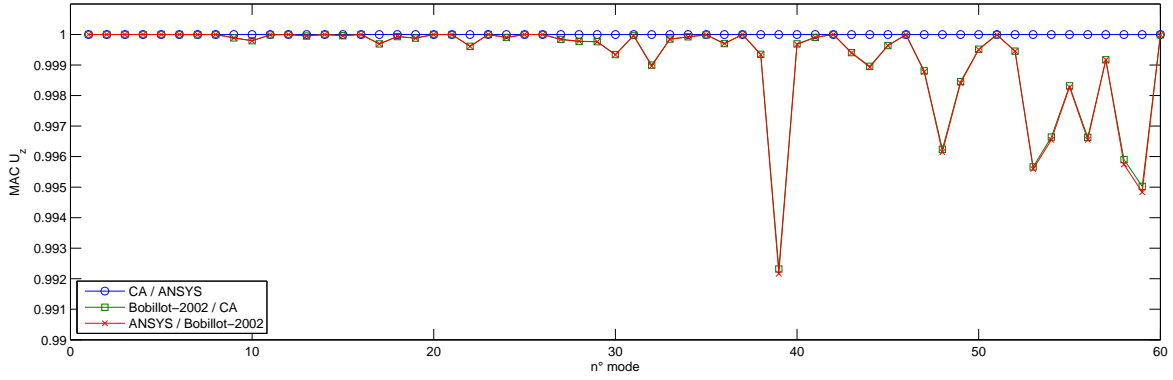


Figure 3.4 – MAC sur les déplacements transversaux entre les trois modèles.

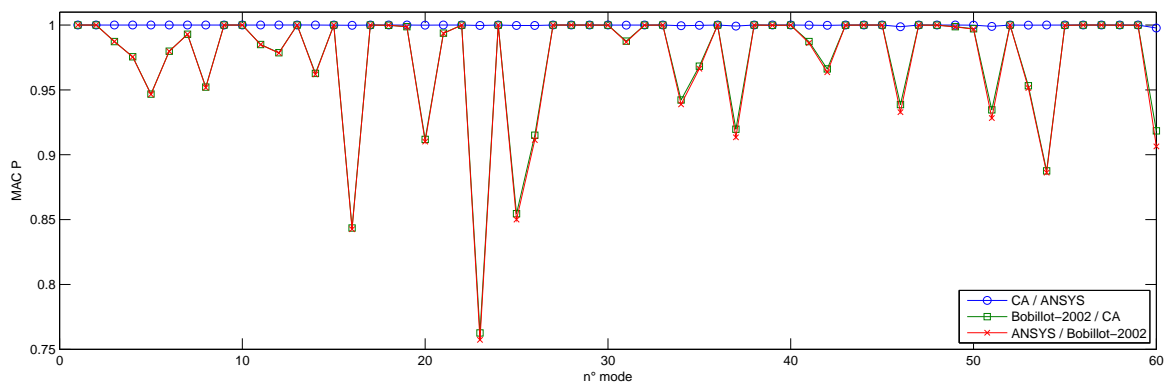


Figure 3.5 – MAC sur la pression acoustique entre les trois modèles.

par l'approximation du vecteur propre est utilisé. La démarche pour calculer ce résidu est la suivante :

Soient φ^s et φ^f les vecteurs propres respectivement associés aux parties structure et fluide tels que $\varphi = [\varphi_s \ \varphi_f]$. Soit λ la valeur propre associée. λ et φ vérifient le système :

$$\begin{cases} (K_s - \lambda M_s) \varphi_s - C \varphi_f = 0, \\ (K_f - \lambda M_f) \varphi_f - \rho_0 \lambda C_T \varphi_s = 0. \end{cases} \quad (3.38)$$

Or, les valeurs propres et les vecteurs propres sont approximés, ainsi l'équation (3.38) n'est dans les faits pas nulle. Soit :

$$\begin{cases} (K_s - \lambda M_s) \varphi_s - C \varphi_f = R_s, \\ (K_f - \lambda M_f) \varphi_f - \rho_0 \lambda C_T \varphi_s = R_f. \end{cases} \quad (3.39)$$

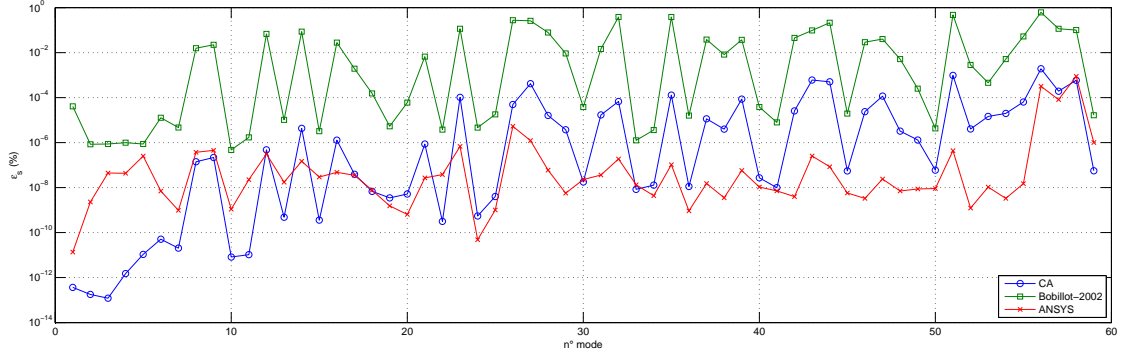
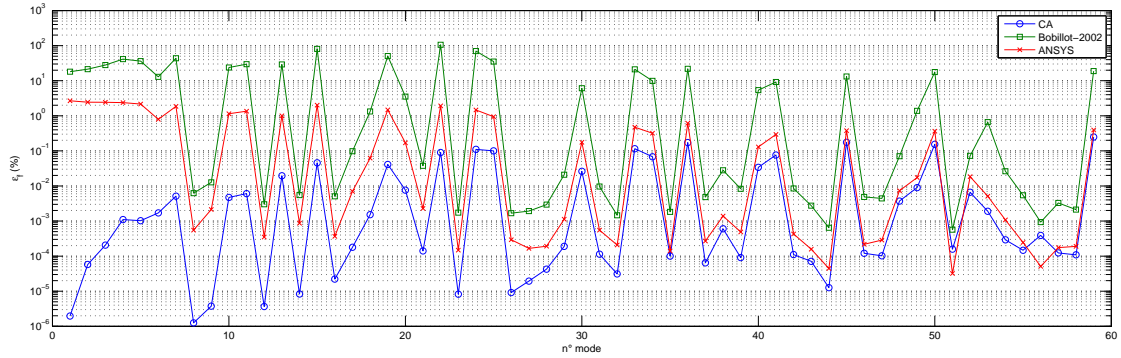
où, R_s et R_f sont des résidus de force d'erreur. Les résidus statiques en déplacement et en pression équivalents à ces résidus de force s'écrivent sous la forme :

$$\begin{cases} r_s = K_s^{-1} R_s, \\ r_f = K_f^{-1} R_f. \end{cases} \quad (3.40)$$

Le rapport de l'énergie de déformation résiduelle issue de r_s et r_f sur l'énergie de déformation du vecteur propre s'écrit alors sous la forme :

$$\begin{cases} \varepsilon_s = \frac{r_s^T K_s r_s}{\varphi_s^T K_s \varphi_s}, \\ \varepsilon_f = \frac{r_f^T K_f r_f}{\varphi_f^T K_f \varphi_f}. \end{cases} \quad (3.41)$$

Les figures 3.6 et 3.7 montrent les rapports ε_s et ε_f en % pour les trois modèles en excluant le premier mode (mode de corps rigide acoustique). En visualisant les deux figures, on constate que les résidus ε_s sont très faibles ($< 1\%$) pour les trois modèles alors que l'ordre de grandeur de ε_f n'est pas le même pour la méthode des itérations sur le résidu comparé aux deux autres méthodes. En effet, 25 modes sur les 60 calculés sont mal prédits par la méthode des itérations sur le résidu ($\varepsilon_f > 1\%$) et cela justifie l'écart retrouvé sur le MAC en pression. En comparant les résultats obtenus avec ANSYS et avec la méthode CA, on constate que les résultats diffèrent entre la partie structure et fluide. Ainsi, ε_f obtenu avec la CA est toujours plus faible que celui obtenu avec


 Figure 3.6 – ε_s pour les trois modèles.

 Figure 3.7 – ε_f pour les trois modèles.

ANSYS et l'écart est important pour les premiers modes. Les conclusions sur ε_s sont moins évidentes, mais on peut toujours constater que les premiers modes sont toujours plus précis par la CA alors qu'à partir du 15^{ème} mode, le ε_s d'ANSYS est plus faible. Cependant, l'ordre de grandeur de ces erreurs est tellement faible ($< 1.10^{-3}\%$) que l'écart est infime.

En conclusion de cette partie, on peut formuler les remarques suivantes :

- la méthode des itérations sur le résidu et la méthode proposée par ANSYS sont des méthodes itératives nécessitant une résolution du système linéaire à chaque itération. Un premier avantage de la méthode des approximations combinées est le nombre de procédure à effectuer qui est moins important par rapport aux deux autres méthodes.
- la méthode des itérations sur le résidu et la méthode des approximations combinées sont des méthodes qui dépendent d'un critère d'arrêt. Pour la méthode des

itérations sur les résidus il s'agit du résidu à imposer a priori et pour la méthode des approximations combinées, il s'agit de l'ordre du développement de la série de Taylor. Ces critères peuvent varier d'une application à une autre contrairement à la méthode d'ANSYS,

- la variante de la méthode des approximations combinées proposée dans ce paragraphe présente une nouvelle alternative pour calculer les vecteurs propres et les valeurs propres d'un système couplé. Sur les trois méthodes testées, elle semble la mieux adaptée en terme de précision pour cet exemple.

Cette variante des approximations combinées ouvre une multitude d'opportunités à développer dans le domaine de réduction de modèle des problèmes couplés, notamment dans les problèmes non-linéaires. L'adaptation au problème non-linéaire se fait en additionnant la contribution de comportement non-linéaire à la réponse. Cependant, l'idée a été développée à la fin de cette thèse et il n'était pas possible d'aller plus loin. Ainsi, l'adaptation de cette méthode aux problèmes non-linéaires couplés ne sera pas développée dans ces travaux.

3.4 Extension au problème couplé non-linéaire

3.4.1 Formulation théorique du problème couplé non-linéaire

Dans le cadre du problème non-linéaire couplé, le comportement non-linéaire géométrique est dû au tenseur de déformation qui n'est plus linéaire en \mathbf{u} . L'équation (3.15) qui décrit le problème vibroacoustique ne prend pas en compte ce comportement. Le tenseur du 2^{nd} ordre des déformations de Green-Lagrange est lié au champ de déplacement par l'équation :

$$\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{u}) = \underbrace{\frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T)}_{\underline{\mathbf{E}}^l} + \underbrace{\frac{1}{2}\nabla \mathbf{u} \nabla \mathbf{u}^T}_{\underline{\mathbf{E}}^{nl}}. \quad (3.42)$$

L'équation (3.12) qui traduit la formulation variationnelle dans le domaine Ω_s n'est plus valable dans le cas non-linéaire. On introduit le tenseur des contraintes de Piola-

Kirchhoff ($\underline{\mathbf{S}}$) et l'équation (3.12) devient :

$$\int_{\Omega} \underline{\mathbf{S}}(\mathbf{u}) : \underline{\mathbf{E}}(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) dV + \int_{\Omega} \rho_s \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \delta \mathbf{u} dV - \int_{\Gamma_{fs}} p \mathbf{n} \delta \mathbf{u} dS = \int_{\Gamma_{sc}} \mathbf{F} \delta \mathbf{u} dS. \quad (3.43)$$

De même, la projection de la solution \mathbf{u} dans le sous espace de dimension N_s permet d'obtenir une solution approchée telle que :

$$\delta U^T M_s \ddot{U} + \delta U^T K_s(U) U - \delta U^T C P = \delta U^T F, \quad \forall \delta U. \quad (3.44)$$

Le système couplé s'écrit alors sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} M_s & 0 \\ \rho_0 C^T & M_f \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{U} \\ \ddot{P} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_s(U) & -C \\ 0 & K_f \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U \\ P \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (3.45)$$

On constate que le couplage n'est pas affecté explicitement par le comportement non-linéaire (la matrice C est constante) : l'équation (3.7) qui traduit les conditions de couplage ne dépend pas du tenseur des déformations.

Dans le cas d'une non-linéarité localisée, les efforts internes non-linéaires sont traduits par l'équation :

$$K_s(U) U = f_{nl}(U) = K_s^l U + \Delta f_{nl}(U). \quad (3.46)$$

K_s^l est la matrice de raideur linéaire (K_s précédemment) et $\Delta f_{nl}(U)$ est l'effort résiduel dû au comportement non-linéaire. On rappelle que la composante i du vecteur $\Delta f_{nl}(U)$ s'écrit sous la forme :

$$\Delta f_{nl_i} = \sum_{j=1}^m k_j (U_i - U_j) + \mu_j (U_i - U_j)^n. \quad (3.47)$$

m est le nombre d'attaches non-linéaires liées au ddl i ; k_j et μ_j sont les composantes des raideurs et n est le degré de non-linéarité.

Pour des non-linéarités de type grands déplacements appliquées aux structures minces, on rappelle qu'il s'agit aussi d'un problème de couplage entre les déplacements dans le plan moyen de la plaque (membrane) et hors plan (flexion). Le système matriciel s'écrit alors sous la forme :

$$\begin{bmatrix} M_s^m & 0 & 0 \\ 0 & M_s^f & 0 \\ 0 & \rho_0 C_n^T & M_f \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{U} \\ \ddot{W} \\ \ddot{P} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_s^m & \frac{1}{2} \Delta K_1 & 0 \\ \Delta K_1^T & K_s^f + \Delta K_2 & -C_n \\ 0 & 0 & K_f \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U \\ W \\ P \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F^m \\ F^f \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (3.48)$$

Dans cette équation, U et W sont les déplacements dans le plan et hors plan, M_s^m et K_s^m sont les matrices de masse et de raideur dédiées au problème dans le plan (membrane), M_s^f , K_s^f sont les matrices de masse et de raideur dédiées au problème hors plan (flexion), ΔK_1 et ΔK_2 sont des matrices non constantes (fonction de W) qui traduisent le couplage entre les effets de la membrane et de flexion ainsi que le comportement non-linéaire. C_n est la matrice de couplage fluide-structure; elle représente une partie de la matrice C qui traduit le couplage entre les déplacements normaux sur la surface de couplage et la pression. Le couplage fluide-structure s'effectue uniquement entre W et P : en effet, la condition de couplage est portée suivant la normale \mathbf{n} à la surface de contact.

Les méthodes de résolution de l'équation (3.45) sont les mêmes que celles présentées dans le chapitre 1. De manière générale, la méthode de résolution va dépendre de la nature de l'excitation F . Si F est harmonique et le comportement du système est faiblement non-linéaire, la méthode de la balance harmonique s'applique. Pour une excitation quelconque, l'intégration temporelle est la méthode la mieux adaptée. Dans tous les cas et quelle que soit F , la forme non-linéaire de l'équation (3.45) implique une résolution par continuation où l'on cherche à minimiser un résidu suite à une ou plusieurs inversions de matrices tangentes. Ainsi, la résolution est coûteuse et le passage par des modèles réduits est incontournable.

3.4.2 Réduction de modèle couplé non-linéaire

Les méthodes de réduction dédiées aux problèmes non-linéaires présentées dans le chapitre 2 doivent être étendues pour s'adapter au problème couplé non-linéaire. Ainsi, la base de réduction doit tenir compte du comportement non-linéaire de la structure et du couplage fluide-structure. L'idée est alors d'étendre ce qui a été proposé précédemment pour les problèmes non-linéaires et de l'enrichir avec les techniques de réduction des problèmes couplés.

Extension du problème structural au problème couplé

En supposant que le fluide considéré est un fluide léger, l'action de la structure sur le fluide sera plus importante que celle du fluide sur la structure. L'équation homogène du problème couplé qui est issue de l'équation (3.21) et qui décrit l'action de la structure sur le fluide s'écrit sous la forme :

$$(K_f - \omega^2 M_f) P = \omega^2 \rho_0 C^T U. \quad (3.49)$$

Il est possible à travers cette équation d'obtenir des vecteurs résiduels qui décrivent l'action de la structure sur le fluide. Ces vecteurs s'écrivent sous la forme :

$$\Delta T_{fs} = (K_f - \omega^2 M_f)^{-1} C^T U_s. \quad (3.50)$$

U_s est un vecteur de déplacement qui est assimilé à une déformation modale ou statique de la structure. Selon le type de non-linéarité traité, U_s aura une forme spécifique. Le terme ω dans cette équation est un terme inconnu a priori, mais il est toujours possible de mettre une valeur bien spécifique pour obtenir la contribution résiduelle souhaitée. Tran [120] propose de choisir une valeur ω incluse dans la bande d'intérêt de la structure et loin d'une valeur propre du fluide. Le principal inconvénient de cette technique se rencontre pour des systèmes ayant une densité modale importante au sens où la contribution modale des modes proches de ω choisi sera privilégiée sur les autres modes. Dans notre cas, on propose un choix de ω inférieure à la première pulsation propre de la structure. Ainsi, les résidus calculés sont assimilés à la contribution statique de la structure sur le fluide.

Cas d'une non-linéarité localisée

La méthode de réduction proposée pour les non-linéarités localisées consiste à enrichir la base modale de la structure in vacuum par sa réponse statique due à des efforts unitaires sur chaque ddl non-linéaire :

$$\begin{cases} T_s = [T_s^0 \ \Delta T_s^1 \ \dots \ \Delta T_s^i \ \dots \ \Delta T_s^m], \text{ avec } i = 1 \dots m, \\ \Delta T_s^i = K_s^{l-1} F_i. \end{cases} \quad (3.51)$$

m est le nombre de ddls non-linéaires appartenant au système, et F_i est un vecteur force de composante unitaire sur le $i^{\text{ème}}$ ddl non-linéaire. Une normalisation de ces vecteurs résiduels est nécessaire afin que la décomposition en valeurs singulières de T_s ne soit pas erronée.

La base modale du fluide à parois rigides est alors enrichie par la contribution statique de la structure sur le fluide. Ces résidus statiques s'écrivent sous la forme :

$$\Delta T_{s \rightarrow f} = (K_f - \omega^2 M_f)^{-1} C^T T_s, \quad (3.52)$$

une normalisation des vecteurs qui constituent cette sous-base est nécessaire et la base du fluide aura la forme :

$$T_f = [T_f^0 \ \Delta T_{s \rightarrow f}]^\perp. \quad (3.53)$$

Finalement, cette base nécessite aussi une décomposition en valeurs singulières pour assurer un bon conditionnement du problème.

La base de réduction du modèle couplé assemble les deux bases indépendantes mais elle prend en compte le comportement non-linéaire ainsi que le couplage. Cette base s'écrit sous la forme :

$$T = \begin{bmatrix} T_s & 0 \\ 0 & T_f \end{bmatrix}. \quad (3.54)$$

Cas d'un fluide lourd

Dans le cas d'un fluide lourd où les masses volumiques du fluide et de la structure sont du même ordre de grandeur, l'action du fluide sur la structure ne peut plus être négligée lors de la construction de la base de réduction. A noter qu'on reste dans le cas où le fluide occupe le domaine entier de la cavité et les effets de la pesanteur sont négligés. La contribution statique du fluide sur la structure s'écrit sous la forme :

$$K_s U = C P. \quad (3.55)$$

Cette contribution peut être approximée en enrichissant la base de la structure par des résidus qui traduisent cette expression. Soit :

$$\Delta T_{f \rightarrow s} = K_s^{-1} C T_f, \quad (3.56)$$

et la nouvelle base dédiée à la structure s'écrit alors sous la forme :

$$T_s^{fl} = [T_s \ \Delta T_{f \rightarrow s}]. \quad (3.57)$$

Une normalisation de $\Delta T_{f \rightarrow s}$ est nécessaire ainsi qu'une décomposition en valeurs singulières de T_s^{fl} pour assurer le bon conditionnement du problème.

Cas d'une non-linéarité répartie

La forme matricielle de l'équation (3.48) permet dans des cas particuliers de séparer les matrices afin d'obtenir une équation équivalente à un problème perturbé tel que :

$$(M_0 + \Delta M) \ddot{X} + (K_0 + \Delta K) X = F(t), \quad (3.58)$$

Les non-linéarités géométriques en grands déplacements, particularités des structures minces, ont été traités dans le chapitre 2 où la formulation s'écrit sous la forme de l'équation (3.58) avec un couplage entre les déplacements dans le plan et hors plan. Cette équation peut alors être explicitée de sorte que :

$$\begin{aligned} K_0 &= \begin{bmatrix} K_s^m & 0 & 0 \\ 0 & K_s^f & 0 \\ 0 & 0 & K_f \end{bmatrix}, \quad M_0 = \begin{bmatrix} M_s^m & 0 & 0 \\ 0 & M_s^f & 0 \\ 0 & 0 & M_f \end{bmatrix}, \\ \Delta K &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}\Delta K_1 & 0 \\ \Delta K_1^T & \Delta K_2 & -C_n \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \Delta M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_0 C_n^T & 0 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (3.59)$$

et l'équation homogène associée à ce problème s'écrit alors sous la forme :

$$\left(\begin{bmatrix} K_s^m & \frac{1}{2}\Delta K_1 & 0 \\ \Delta K_1^T & K_s^f + \Delta K_2 & -C_n \\ 0 & 0 & K_f \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} M_s^m & 0 & 0 \\ 0 & M_s^f & 0 \\ 0 & \rho_0 C_n^T & M_f \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} U \\ W \\ P \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (3.60)$$

La forme du problème permet d'appliquer la méthode des approximations combinées en prenant en compte les phénomènes non-linéaires et le couplage fluide-structure. Mais, comme démontré précédemment, la forme de la matrice B_0 conduit à des vecteurs nuls à partir de l'ordre 1 du développement de la série de Taylor. L'idée est alors

d'appliquer la méthode des approximations combinées à la structure en tenant compte du comportement non-linéaire et de tirer profit du couplage fluide-structure qui est indépendant dans ce cas du couplage membrane-flexion. Ainsi, le modèle réduit se construit de la manière suivante :

Soit ΔK_s la variation de la raideur non-linéaire de la structure. Soient T_s^m et T_s^f les bases des vecteurs propres des problèmes membrane et flexion respectivement. Soit T_s^0 la base de vecteurs propres contenant T_s^m et T_s^f . Ces entités s'écrivent sous la forme :

$$\Delta K_s = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}\Delta K_1 \\ \Delta K_1^T & \Delta K_2 \end{bmatrix}, \quad (3.61)$$

et

$$T_s^0 = [T_s^m \ T_s^f]. \quad (3.62)$$

Les paramètres de la méthode des approximations combinées auront la forme suivante :

$$\begin{cases} r_0 = K_s^{-1} M_s T_s^0, \\ B_0 = K_s^{-1} \Delta K_s. \end{cases} \quad (3.63)$$

A l'ordre n du développement de la série de Taylor, la base dédiée à la structure s'écrit sous la forme :

$$\begin{cases} T_s = [r_0 \ \cdots \ r_i \ \cdots \ r_n], \text{ avec } i = 1 \ \dots \ n, \\ r_i = -B_0 r_{i-1}. \end{cases} \quad (3.64)$$

Comme il est mentionné précédemment, le couplage fluide-structure est uniquement affecté par le mouvement hors plan de la structure. Ainsi, il est nécessaire de prendre en compte la contribution statique des modes hors plan. Cette contribution se traduit par l'équation :

$$\Delta T_{s \rightarrow f} = (K_f - \omega^2 M_f)^{-1} C^T T_s^f. \quad (3.65)$$

La base de réduction dédiée au fluide s'écrit sous la forme :

$$T_f = [T_f^0 \ \Delta T_{s \rightarrow f}]. \quad (3.66)$$

Finalement la base du modèle complet s'écrit sous la forme :

$$T = \begin{bmatrix} T_s & 0 \\ 0 & T_f \end{bmatrix}. \quad (3.67)$$

3.5 Applications

Afin de montrer l'intérêt des méthodes de réduction proposées, plusieurs modèles éléments finis de cavité acoustique couplée avec une structure sont étudiés. Les réponses temporelles de ces modèles sont comparées aux réponses obtenues avec différents modèles réduits afin de montrer la performance des méthodes proposées. Les cas de non-linéarités localisées et réparties sont étudiés séparément. Afin de pouvoir quantifier la réponse du fluide, une interprétation énergétique est utilisée.

3.5.1 Indicateurs vibroacoustiques

Les indicateurs introduits pour représenter la réponse vibroacoustique de la structure sont l'énergie acoustique, la vitesse quadratique de la structure ainsi que les moments temporels.

L'énergie acoustique dans le domaine du fluide est définie par [97] :

$$E_a = \int_{\Omega_f} \left(\frac{1}{2} \rho_0 \mathbf{v}_f^2 + \frac{1}{2} \frac{p^2}{\rho_0 c_0^2} \right) dV. \quad (3.68)$$

Le terme $\int_{\Omega_f} \frac{1}{2} \frac{p^2}{\rho_0 c_0^2} dV$ représente l'énergie potentielle dans le fluide et le terme $\int_{\Omega_f} \frac{1}{2} \rho_0 \mathbf{v}_f^2 dV$ l'énergie cinétique. Le calcul de l'énergie potentielle est explicite du fait qu'elle dépend de la pression qui est la variable du problème. L'énergie cinétique dépend de la vitesse dans le fluide. Ainsi, pour pouvoir la calculer, le plus simple est de passer par le potentiel de vitesse qui est en lien direct avec la vitesse et la pression. Le potentiel de vitesse ϕ est lié à la vitesse du fluide et à sa pression par les équations :

$$\begin{cases} \mathbf{v}_f = \nabla \phi, \\ p = -\rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial t}. \end{cases} \quad (3.69)$$

Ainsi, l'énergie acoustique s'écrit sous la forme discrète suivante :

$$E_a = \frac{1}{2} \rho_0 \Phi^T K_f \Phi + \frac{1}{2 \rho_0} P^T M_f P, \quad (3.70)$$

où Φ désigne la forme discrétisée de ϕ .

Par définition, la vitesse quadratique moyenne au niveau de la structure s'écrit sous la forme :

$$V_n^2 = \frac{1}{\Gamma_s} \int_{\Gamma_s} \dot{u}_n^2 dS. \quad (3.71)$$

Γ_s est l'air de la structure vibrante et \dot{u}_n la vitesse correspondante. Sous forme discrète cette équation s'écrit :

$$V_n^2 = \frac{1}{S_s} \dot{U}^T M_n \dot{U}, \quad (3.72)$$

où M_n est associée à la discrétisation $\int_{\partial\Omega_s} \dot{u}_n^2 dS$.

3.5.2 Non-linéarités localisées : cavité suspendue portant une masse

La première application est une cavité suspendue portant une masse. La cavité admet cinq parois souples modélisées par des plaques d'épaisseur $3mm$ et une paroi libre ($P = 0$). Les suspensions de la cavité et de la masse sont modélisées par des ressorts non-linéaires (figure 3.8). Ce modèle a la particularité de posséder une densité modale importante qui permet d'avoir une forte interaction fluide-structure dès les basses fréquences. Le tableau 3.2 présente les données du modèle éléments finis. La masse portée par la cavité est de $25kg$ et la raideur des liaisons non-linéaires est de $k_l = 10^4 N/m$ et $k_{nl} = 10^{12} N/m^3$. Le modèle éléments finis est discrétisé en 24 éléments par ligne sur les trois dimensions. Cela engendre un modèle de 17577 ddls structure et 15000 ddls fluide. Le couplage entre la masse et le fluide est négligé et un amortissement structural proportionnel ($B = 10^{-4} K_s + 10^{-4} M_s$) est appliqué pour modéliser les dissipations.

La cavité est excitée en deux points (aux centres des plans $y = 0$ et $x = L_x$) sur les trois directions, sans déphasage et pour différents niveaux de fréquence et d'excitation. Le modèle éléments finis (**MEF**) est comparé à différents modèles réduits afin de montrer l'avantage de la méthode proposée :

- le premier modèle réduit est constitué de la base modale du problème fluide-structure découplé. 160 modes structure et 30 modes fluide dans la bande $[0 - 600Hz]$ forment cette base (**BM**),

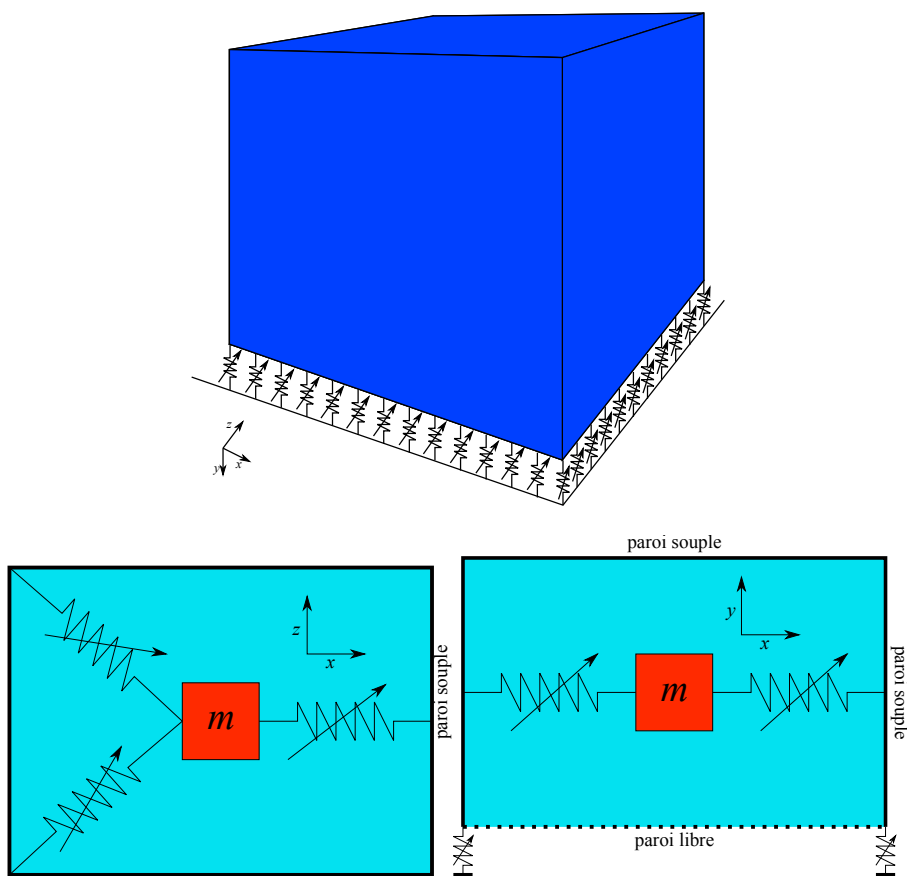


Figure 3.8 – Cavité suspendue portant une masse

Structure	Masse volumique (kg/m^3)	2700
	Module d'Young (MPa)	70.10^3
	Coefficient de poisson	0.33
Fluide	Dimensions ($L_x \times L_y \times L_z \text{ mm}^3$)	$654 \times 527 \times 600$
	Masse volumique (kg/m^3)	1.2
	Célérité (m/s)	340

Tableau 3.2 – Données du modèle

			BM		BMES		BMEF		BMESF	
erreur sur U, \dot{U}	44Hz	10N	0.4	5.7	0.1	2.2	0.3	2.8	-0.0	0.0
		20N	4.9	2.6	0.2	1.3	4.3	1.7	-0.0	0.0
	161Hz	10N	-0.2	1.1	-0.2	1.1	-0.0	0.1	0.0	0.1
		20N	-0.2	1.1	-0.2	1.0	0.0	0.1	-0.0	0.1
erreur sur P, \dot{P}	44Hz	10N	4.1	-6.2	3.9	0.8	1.7	-1.0	0.0	0.1
		20N	6.4	8.5	6.7	10.3	1.5	0.1	-0.0	-0.1
	161Hz	10N	0.8	0.8	0.7	0.7	0.4	0.4	0.4	0.4
		20N	0.8	0.8	0.7	0.7	0.4	0.4	0.4	0.4

 Tableau 3.3 – Erreurs relatives sur E en % par rapport au modèle éléments finis **MEF**.

- le second modèle reprend la base modale du problème découplé où la sous-base dédiée à la structure est enrichie par la contribution du comportement non-linéaire comme il a été proposé dans le chapitre précédent, (**BMES**)
- le troisième modèle reprend la base modale du problème découplé où la sous-base dédiée au fluide est enrichie par la contribution de la structure (**BMEF**),
- le dernier modèle est issu de la méthode de réduction proposée de sorte que la sous-base dédiée au fluide est enrichie par une base structure prenant en compte le comportement non-linéaire (**BMESF**).

Le tableau 3.3 montre l'erreur relative sur le moment temporel E en U, \dot{U}, P et \dot{P} des modèles réduits comparés au modèle éléments finis complet (**MEF**) pour plusieurs simulations :

- le mode à dominance structure à 44Hz est excité pour deux niveaux d'excitation (10N et 20N),
- le mode à dominance fluide à 161Hz est excité pour deux niveaux d'excitation (10N et 20N).

A titre indicatif, la figure 3.9 montre les indicateurs acoustiques pour une excitation de 20N à 44Hz.

Les résultats montrent que le modèle réduit **BMESF** est celui qui prédit au mieux la réponse : son erreur relative sur E ne dépasse pas les 0.4%. Par ailleurs, la différence

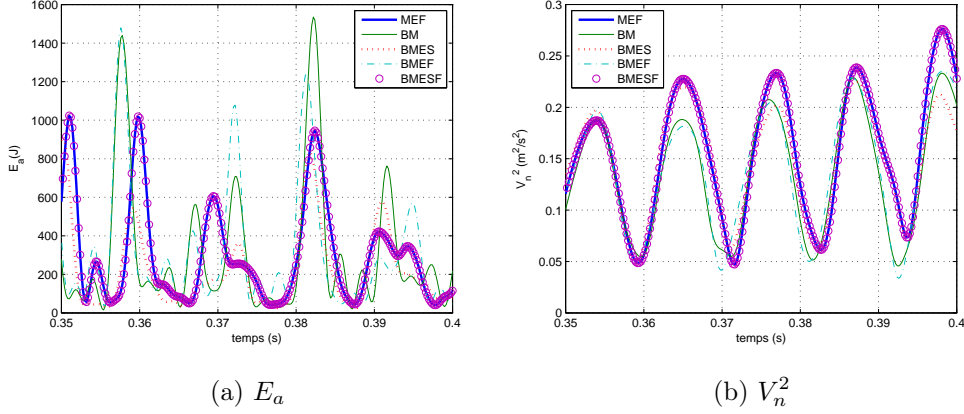


Figure 3.9 – Comparaison des indicateurs vibroacoustiques pour une excitation à $20N$ et $44Hz$ en non-linéarité localisée.

du modèle **BMESF** sur les autres modèles se fait surtout sur l'excitation à $44Hz$. En effet, à $161Hz$ on remarque que l'erreur reste constante et faible pour les deux niveaux d'excitation sur les quatre modèles réduits. Malgré un fort comportement non-linéaire qui se traduit par plusieurs itérations de Newton-Raphson pour chaque pas temporel, la réponse temporelle est dominée par le couplage fluide-structure beaucoup plus que par le comportement non-linéaire de sorte que les erreurs obtenues avec la **BMES** sont supérieures aux erreurs **BMEF**. Ceci ne peut pas être généralisé puisque l'étude de la réponse à $44Hz$ montre que le modèle **BMES** prédit mieux le comportement de la structure que le modèle **BMEF**.

La figure 3.10 montre l'écart relatif sur le moment temporel E en % entre le modèle réduit **BMESF** et les autres modèles réduits pour des niveaux d'excitation très élevés ($50N$ et $100N$). En effet, la qualité de la réponse à travers le modèle **BMESF** était toujours supérieure comparée aux autres modèles réduits. Au vu des contraintes de temps que demandait la solution du modèle complet **MEF**, il était plus judicieux de se référer au modèle réduit **BMESF** qui reste une approximation du modèle **MEF**. Ainsi, on peut constater que pour une excitation à $50N$ et $161Hz$ la réponse est toujours dominée par le couplage alors que pour $100N$ cela s'inverse du fait que l'écart visualisé sur la figure 3.10 est inférieur pour le modèle **BMES** que **BMEF**. Concernant l'excitation à $44Hz$, on remarque que le modèle **BMEF** prédit moins bien la réponse

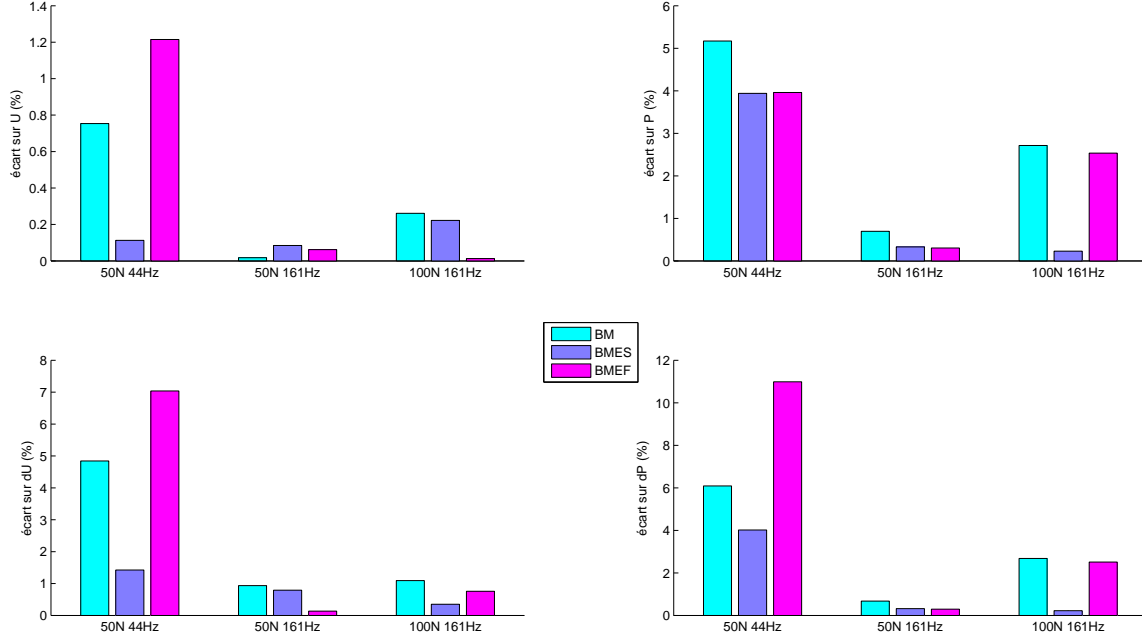


Figure 3.10 – Ecart sur E entre le modèle réduit BMESF et les autres modèles réduits.

que la simple base modale du modèle **BM** ; dans ce cas, la réponse est largement dominée par le comportement non-linéaire et la contribution du couplage est faible au point où sa prise en compte dans le modèle réduit sans prendre en compte le comportement non-linéaire peut fausser les résultats.

En conclusion, la prédominance dans la réponse d'effets liés au comportement structural non-linéaire ou au couplage fluide-structure ne peut être connu a priori. Le modèle réduit proposé **BMESF** présente l'avantage de prendre en compte ces deux aspects.

3.5.3 Non-linéarités réparties : cavité en contact avec une plaque mince

L'exemple suivant reprend la cavité acoustique étudiée dans l'application du paragraphe 3.3. La plaque en contact avec le fluide a une épaisseur $h = 1.5mm$, elle est encastree sur ses quatre bords. Un amortissement structural proportionnel ($B = 10^{-4}K_s + 10^{-4}M_s$) est appliqué pour modéliser les dissipations. On s'intéresse à la réponse temporelle du problème couplé où la plaque est excitée en son centre à différents

	$40Hz$			$270Hz$		
Force	$50N$	$100N$	$200N$	$100N$	$250N$	$500N$
w/h	1.8	2.4	3.0	1.0	1.8	2.7

Tableau 3.4 – Déplacement relatif maximal de la plaque pour différents niveaux d’excitation.

niveaux autour du premier mode à dominance structural ($40Hz$) et autour du premier mode à dominance acoustique ($270Hz$).

A titre indicatif, le tableau 3.4 montre le déplacement relatif maximal obtenu au niveau de la plaque pour les différentes simulations effectuées.

Afin de mettre en valeur la méthode des approximations combinées, plusieurs modèles réduits ont été réalisés et comparés avec le modèle éléments finis complet **MEF** :

- un modèle construit à partir de la base modale du problème découplé contenant 40 modes de plaque en flexion ainsi que 40 en membrane et 80 modes acoustiques (**BM**),
- un modèle où la base fluide est enrichie en prenant en compte la contribution de la structure (**BMEF**),
- un modèle où les modes structure du modèle **BM** sont utilisés pour construire une nouvelle base par la méthode des approximations combinées qui est enrichie par la base fluide du problème (**CAS**),
- un modèle où les modes fluide du modèle **CAS** sont enrichis par la contribution de la structure (**CASEF**).

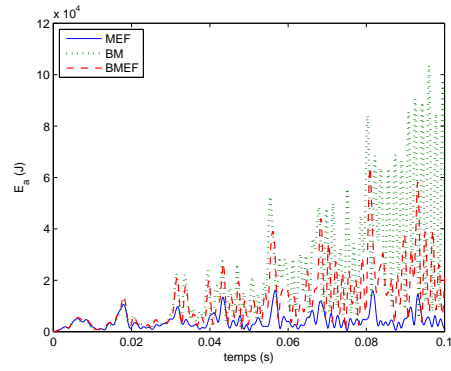
Le tableau 3.5 montre l’erreur relative sur le moment temporel E (en déplacement, pression acoustique et leurs dérivées temporelles) des modèles réduits par rapport au modèle de référence **MEF** pour les différents fréquences et niveaux d’excitation. Ce tableau montre en premier lieu la précision obtenue avec le modèle réduit **CASEF** et dans une moindre mesure le modèle **CAS**. Cela montre l’importance d’associer la méthode des approximations combinées à l’enrichissement de la base acoustique pour prendre en compte les effets du couplage. D’autre part, les modèles **BM** et **BMEF** présentent une grande variance dans la prédiction qui ne dépend pas de l’importance

			BM		BMEF		CAS		CASEF	
erreur sur U, \dot{U}	40Hz	50N	13.8	10.0	5.5	2.1	0.6	0.5	-0.0	-0.0
		200N	3.4	-45.2	-3.1	-69.1	0.0	-2.2	-0.0	-0.2
	270Hz	100N	-35.2	-45.2	-40.8	-51.22	-3.9	-4.8	-0.5	-0.6
		250N	-26.6	-27.2	-41.7	-42.2	0.5	0.4	-0.2	-0.3
erreur sur P, \dot{P}	40Hz	50N	12.4	10.6	3.8	1.3	0.3	0.4	0.0	-0.1
		200N	-14.9	+100	-5.9	+100	0.3	-5.8	-0.2	-1.5
	270Hz	100N	-35.4	-49.1	-22.7	-31.7	-2.4	-3.1	0.3	-2.0
		250N	-21.9	-34.3	-33.0	-47.9	-4.1	-4.1	-3.1	-3.5

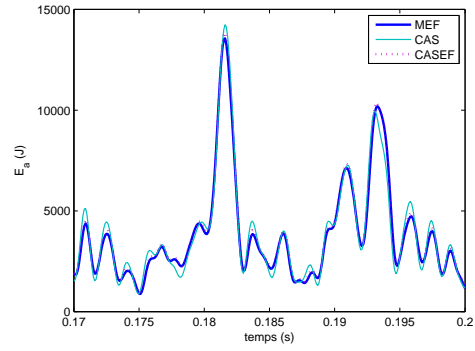
Tableau 3.5 – Erreur relative sur E en % par rapport au modèle éléments finis **MEF**.

de la non-linéarité. Pour illustrer graphiquement ces résultats, la figure 3.11 montre la variation temporelle des indicateurs vibroacoustiques (énergie acoustique et vitesse quadratique) du modèle de référence comparée aux modèles réduits pour une configuration spécifique ($200N - 40Hz$). D'après cette figure, il est évident qu'à partir d'un certain instant temporel ($t = 0.03s$) les modèles **BM** et **BMEF** divergent dans leurs prédictions par manque d'information dans leurs bases de réduction respectives ; en effet, la nature de la réponse dans cette application est dominée par le comportement non-linéaire. Quant au modèle **CASEF**, il montre une très bonne qualité de prédiction grâce à la méthode des approximations combinées et à l'enrichissement des modes fluides mais les écarts avec le modèle de référence sont de l'ordre de 3% pour de grands niveaux d'excitation ($250N - 270Hz$). Sans l'enrichissement de modes fluides (modèle **CAS**) la prédiction est moins précise. Il est important de signaler que l'énergie acoustique utilisée comme indicateur acoustique dans cette étude ne représente pas l'énergie acoustique totale ; la contribution non-linéaire a été négligée pour simplifier le calcul.

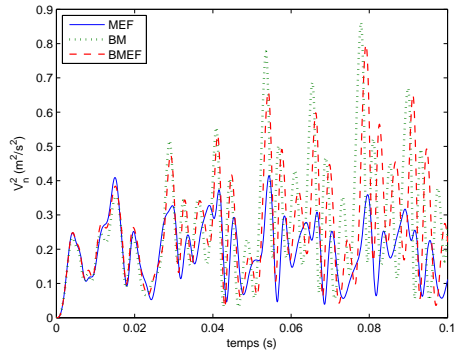
Cette application montre encore une fois l'intérêt de la méthode des approximations combinées pour les problèmes non-linéaires. Pour les différentes simulations effectuées, la nature de la réponse a toujours été dominée par le comportement non-linéaire plutôt que par le couplage. Même en excitant le mode acoustique de $270Hz$ à une amplitude



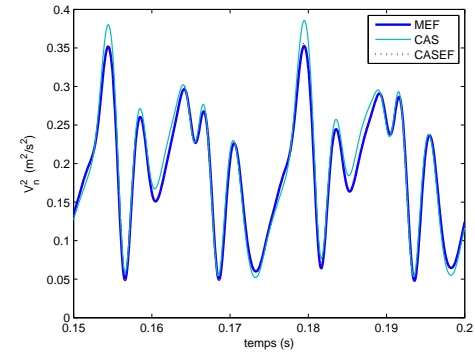
(a) E_a MEF - BM - BMEF



(b) E_a MEF - CAS - CASEF



(c) V_n^2 MEF - BM - BMEF



(d) V_n^2 MEF - CAS - CASEF

Figure 3.11 – Comparaison des indicateurs vibroacoustiques pour une excitation à $200N$ et $40Hz$ en non-linéarité répartie.

qui permet d'avoir un déplacement relatif maximal unitaire ($100N$) la réponse est restée dominée par le comportement non-linéaire d'après les écarts relevés sur le modèle BMEF.

3.6 Conclusion

Ce chapitre propose des méthodes de réduction adaptées aux problèmes vibroacoustiques linéaires ou non-linéaires.

Dans un premier temps, une variante de la méthode des approximations combinées est proposée pour la synthèse modale du problème vibroacoustique linéaire. Cette méthode est comparée à d'autres méthodes de synthèse modale dédiées aux problèmes couplés et les résultats obtenus à travers l'application proposée montrent une grande précision dans la prédiction des modes. Cette variante étend le sujet de recherche à diverses applications telles que les problèmes fortement couplés (hydro-élastiques en présence ou sans gravité ...).

Dans un deuxième temps, les méthodes de réduction proposées dans le chapitre précédent ont été adaptées au problème couplé non-linéaire en considérant des non-linéarités géométriques (localisée ou répartie en grands déplacements). S'agissant d'un problème vibroacoustique, le fluide représente une masse volumique faible devant celle de la structure. Ainsi, la contribution du fluide à la réponse de la structure est faible mais l'inverse doit être pris en compte dans la base de réduction à construire. La base modale acoustique est enrichie par la contribution de la structure à la réponse du fluide. Les applications proposées dans les deux types de non-linéarités montrent l'intérêt de cet enrichissement. La variante de la méthode des approximations combinées proposée permet par ailleurs d'étendre la méthode à des problèmes vibroacoustiques non-linéaires.

Le chapitre suivant s'intéresse à l'extension au problème d'acoustique non-linéaire.

Chapitre 4

Acoustique et vibroacoustique non-linéaires : application aux hauts niveaux de pression

4.1 Introduction

Les modèles éléments finis dédiés aux problèmes d'acoustique ou de vibroacoustique nécessitent des ressources informatiques importantes. L'hypothèse des petites perturbations conduit à un système d'équations différentielles linéaires pour lesquelles l'application du principe de superposition modale permet de réduire la taille du système. Dans le cas où le niveau de fluctuation de pression n'est plus négligeable devant la pression statique, l'hypothèse des petites perturbations n'est plus valable et la mise en équation du système doit en tenir compte. Cette situation est rencontrée dans les applications où le niveau de pression dépasse les 130 dB . A titre d'exemple, les niveaux de pression auxquels est soumis un satellite dans sa coiffe lors du décollage peuvent facilement atteindre ces limites. De même en acoustique musicale, ces niveaux sont souvent rencontrés avec les instruments à percussion comme les timbales.

La mise en équation d'un problème d'acoustique non-linéaire mène à un système d'équations différentielles non-linéaires où, contrairement aux problèmes de vibrations non-linéaires déjà présentés dans ce document, plusieurs termes non-linéaires sont iden-

tifiés. La description du mouvement du fluide acoustique est obtenue à partir des équations de conservation, en tronquant les développements en série de Taylor à un ordre donné. Moyennant certaines hypothèses, on peut obtenir à partir de cette formulation mixte (\mathbf{v}_f, p) une formulation à une seule variable. Les deux formulations les plus populaires sont la formulation en pression de Westervelt [126] et la formulation en potentiel de vitesse de Kuznetsov [68]. Le domaine de validité de ces équations est discuté par la suite afin de pouvoir proposer une méthode de réduction adaptée.

4.2 Mise en équation : acoustique non-linéaire

Le comportement du fluide est décrit par les équations traduisant la conservation de la quantité de mouvement, la conservation de la masse ainsi que la loi de comportement en prenant en compte les conditions aux limites. Ces équations ont été détaillées dans le chapitre précédent et l'hypothèse des petites perturbations a permis la linéarisation de ces équations pour aboutir à un système d'équations différentielles linéaires. Dans le cas où le niveau de pression reste petit par rapport à la pression statique mais pas suffisamment pour linéariser les équations, le problème doit être posé différemment. Le problème posé au chapitre précédent est repris ; ainsi le mouvement du fluide vérifie les équations :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho_{tot} \left(\frac{\partial \mathbf{v}_f}{\partial t} + \mathbf{v}_f \cdot \text{div } \mathbf{v}_f \right) = -\nabla p & \text{sur } \Omega_f, \\ \frac{\partial \rho_{tot}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_{tot} \mathbf{v}_f) = 0 & \text{sur } \Omega_f, \\ \frac{p_{tot}}{p_0} = \left(\frac{\rho_{tot}}{\rho_0} \right)^\gamma & \text{sur } \Omega_f. \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (4.1a) \\ (4.1b) \\ (4.1c) \end{array}$$

Les équations (4.1a) et (4.1b) sont les mêmes que celles décrites au chapitre précédent. L'équation (4.1c) décrit la loi de comportement des gaz parfaits qui est un cas général du cas linéaire. γ est le rapport des capacités calorifiques (1.4 pour l'air).

Kuznetsov [68] et Westervelt [126] proposent deux formulations différentes qui aboutissent à un système d'équations différentielles non-linéaires. Ces équations sont rappelées dans la suite du manuscrit et le domaine de validité de chacune est discuté.

4.2.1 Equation de Kuznetsov

Les équations de base reprises par Kuznetsov sont les équations (4.1a), (4.1b) et (4.1c). Les effets de dissipation sont négligés dans cette étude et l'hypothèse des petites perturbations n'est plus valable mais on considère malgré tout que l'ordre des perturbations reste inférieur aux grandeurs non perturbées :

$$\left| \frac{\rho_{tot} - \rho_0}{\rho_0} \right| < 1, \quad \left| \frac{p_{tot} - p_0}{p_0} \right| < 1.$$

L'équation (4.1c) peut ainsi être développée en série de Taylor tronquée à l'ordre 2 aux alentours de p_0 à entropie constante :

$$p = p_{tot} - p_0 \approx \frac{\partial p}{\partial \rho} (\rho_{tot} - \rho_0) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 p}{\partial \rho^2} (\rho_{tot} - \rho_0)^2. \quad (4.2)$$

Cette équation peut être écrite sous la forme :

$$p = c_0^2 \rho + \frac{1}{2} \frac{c_0^2}{\rho_0} (\gamma - 1) \rho^2, \quad (4.3)$$

avec

$$\rho = \rho_{tot} - \rho_0$$

Ceci permet d'aboutir à l'équation d'acoustique non-linéaire proposée par Kuznetsov qui s'écrit sous la forme :

$$\Delta \phi - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial}{\partial t} \left[(\nabla \phi)^2 + \frac{1}{c_0^2} \frac{(\gamma - 1)}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 \right], \quad (4.4)$$

avec ϕ est le potentiel de vitesse défini par l'équation :

$$p = -\rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial t}.$$

La démonstration permettant d'aboutir à cette équation peut être trouvée dans l'article de référence de Kuznetsov [68] ou dans les ouvrages [52, 86].

Afin de mettre en évidence l'existence d'un comportement non-linéaire malgré l'hypothèse des petites perturbations, la figure 4.1 montre l'évolution de l'erreur relative engendrée sur p suivant la loi de comportement choisie (en l'occurrence l'ordre du développement de l'équation (4.1c)). Plus exactement, il s'agit d'une comparaison des

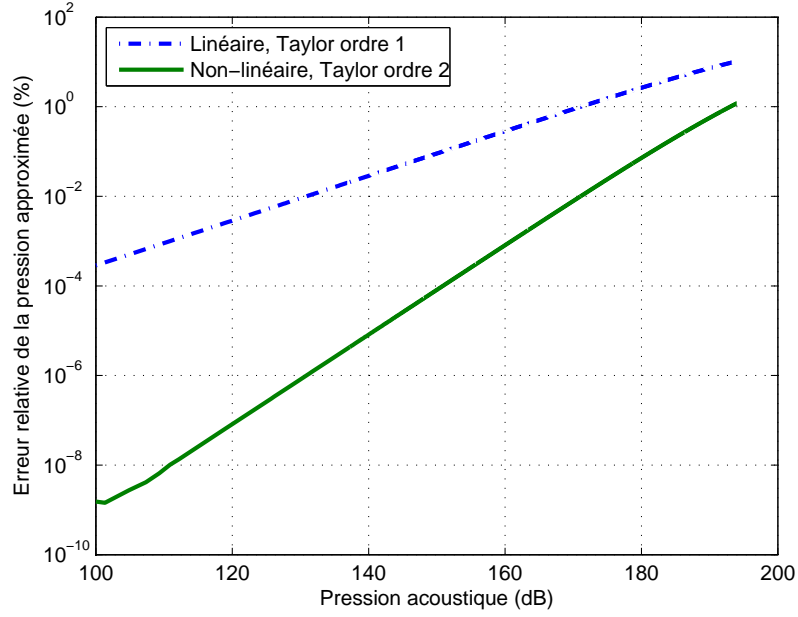


Figure 4.1 – Evolution de l’erreur sur p suivant l’ordre du développement de la série de Taylor.

équations 3.3c et 4.3 par rapport à l’équation exacte 4.1c. Il est important de signaler que l’erreur présentée porte uniquement sur l’équation de comportement du fluide et non pas sur la solution du problème caractérisé par les équations d’ondes. Cela justifie la faible erreur obtenue à 130 dB .

4.2.2 Equation de Westervelt

La formulation complète de l’équation de Westervelt n’a pas été retrouvée dans la littérature. On se propose donc de refaire la démonstration.

De la même façon que Kuznetsov, Westervelt établit sa formulation à partir des équations (4.1a), (4.1b) et (4.1c) linéarisées grâce à l’hypothèse des petites perturbations. A l’inverse de l’équation (4.2), la loi de comportement est issue du développement en série de Taylor tronquée à l’ordre 2 de ρ aux alentours de ρ_0 à entropie constante. L’équation (4.1c) est utilisée pour identifier les termes inconnus du développement. Le

problème est alors traduit par les équations :

$$\begin{cases} \rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}_f}{\partial t} = -\nabla p & \text{sur } \Omega_f, \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_{tot} \operatorname{div} \mathbf{v}_f = 0 & \text{sur } \Omega_f, \\ \rho = \frac{\partial \rho}{\partial p} p + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \rho}{\partial p^2} p^2 & \text{sur } \Omega_f. \end{cases} \quad \begin{matrix} (4.5a) \\ (4.5b) \\ (4.5c) \end{matrix}$$

On cherche à exprimer une équation de la forme de l'équation d'onde classique en p avec un terme non-linéaire.

Soit \mathbf{u}_f le vecteur des déplacements du fluide. En intégrant par rapport au temps l'équation (4.5b), on aura :

$$\int \frac{\dot{\rho}}{\rho_{tot}} dt = -\operatorname{div} \mathbf{u}_f + cst,$$

soit

$$\ln \rho_{tot} = -\operatorname{div} \mathbf{u}_f + cst.$$

Or, on sait que lorsque $\mathbf{u}_f = 0$, $\rho = \rho_0$ d'où, $cst = \ln \rho_0$. Ainsi :

$$\ln \left(\frac{\rho_{tot}}{\rho_0} \right) = \ln \left(1 + \frac{\rho_{tot} - \rho_0}{\rho_0} \right) = -\operatorname{div} \mathbf{u}_f.$$

Le développement limité de cette équation au premier ordre permet d'obtenir la nouvelle équation décrivant la conservation de masse. Soit :

$$\frac{\rho_0 - \rho_{tot}}{\rho_{tot}} \approx \operatorname{div} \mathbf{u}_f, \quad (4.6)$$

La dérivée par rapport au temps de cette équation donne :

$$-\frac{\rho_0}{\rho_{tot}^2} \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial \operatorname{div} \mathbf{u}_f}{\partial t} = \operatorname{div} \mathbf{v}_f,$$

et la dérivée seconde par rapport au temps s'écrit :

$$-\rho_0 \left(\frac{-2}{\rho_{tot}^3} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{\rho_{tot}^2} \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} \right) = \frac{\partial \operatorname{div} \mathbf{v}_f}{\partial t}.$$

On suppose que $(\rho + \rho_0)^n \approx \rho_0^n$, cette équation devient :

$$\frac{2}{\rho_0} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right)^2 - \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = \rho_0 \operatorname{div} \frac{\partial \mathbf{v}_f}{\partial t}.$$

En appliquant l'opérateur div à l'équation (4.5a), on obtient :

$$\frac{2}{\rho_0} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right)^2 - \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = -\Delta p. \quad (4.7)$$

On cherche alors à exprimer $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ en fonction de $\frac{\partial p}{\partial t}$ pour obtenir une équation d'onde non-linéaire en p .

A partir de l'équation (4.5c), on cherche à exprimer les termes $\frac{\partial \rho}{\partial p}$ et $\frac{\partial^2 \rho}{\partial p^2}$. Dans le cas linéaire, la relation qui lie la fluctuation de pression à celle de la masse volumique est la suivante :

$$\rho = \frac{1}{c_0^2} p.$$

Afin que cette relation soit homogène avec le développement en série de Taylor tronqué à l'ordre 1 il faut que :

$$\frac{\partial \rho}{\partial p} = \frac{1}{c_0^2}.$$

Le terme $\frac{\partial^2 \rho}{\partial p^2}$ est déduit en dérivant deux fois l'équation (4.1c) :

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial p^2} = \frac{1 - \gamma}{\rho_0 c_0^4}.$$

L'équation (4.5c) devient :

$$\rho = \frac{1}{c_0^2} p + \frac{1}{2} \frac{(1 - \gamma)}{\rho_0 c_0^4} p^2. \quad (4.8)$$

On cherche alors à déterminer les expressions des termes $\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right)^2$ et $\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2}$:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right)^2 &= \left(\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{(1 - \gamma)}{\rho_0 c_0^4} \frac{\partial^2 p}{\partial t} \right)^2, \\ &\approx \left(\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial p}{\partial t} \right)^2 + \dots, \end{aligned}$$

les autres termes d'ordre supérieur sont négligés.

On cherche aussi à retrouver la relation entre $\left(\frac{\partial p}{\partial t} \right)^2$ et $\frac{\partial^2 p^2}{\partial t^2}$:

$$\frac{\partial p^2}{\partial t} = 2p \frac{\partial p}{\partial t},$$

$$\frac{\partial^2 p^2}{\partial t^2} = 2 \left[\left(\frac{\partial p}{\partial t} \right)^2 + p \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \right].$$

Le deuxième terme de cette équation est négligé devant le premier, ainsi :

$$\frac{\partial^2 p^2}{\partial t^2} = 2 \left(\frac{\partial p}{\partial t} \right)^2,$$

et

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right)^2 = \frac{1}{2c_0^4} \frac{\partial^2 p^2}{\partial t^2}.$$

La dérivée seconde de cette équation par rapport au temps s'écrit sous la forme :

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + \frac{1}{2} \frac{(1 - \gamma)}{\rho_0 c_0^4} \frac{\partial^2 p^2}{\partial t^2}.$$

L'équation (4.7) devient :

$$-\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + \Delta p = -\frac{\beta}{\rho_0 c_0^4} \frac{\partial^2 p^2}{\partial t^2}, \quad (4.9)$$

avec $\beta = \frac{\gamma + 1}{2}$ le paramètre non-linéaire du fluide.

L'équation (4.9) est l'équation de propagation de pression non-linéaire proposée par Westervelt.

D'après la démarche suivie pour aboutir à cette équation et d'après les hypothèses considérées, il apparaît que le domaine de validité de l'équation de Westervelt est plus restreint que l'équation de Kuznetsov. D'ailleurs, l'auteur dans son article admet que certaines hypothèses ne sont pas justifiées mais il s'appuie sur des résultats expérimentaux pour valider ces hypothèses. Ainsi, la suite des travaux est basée sur l'équation de Kuznetsov afin de modéliser le problème d'acoustique non-linéaire.

4.3 Formulation du problème couplé fluide-structure non-linéaire

4.3.1 Formulation variationnelle du problème acoustique non-linéaire

L'équation de Kuznetsov (4.4) est valable dans tout le domaine Ω_f du fluide. On introduit l'espace \mathcal{C}_f des fonctions $\delta\phi(M, M \in \Omega_f)$ suffisamment régulières et l'espace $\mathcal{C}_f^0 \subset \mathcal{C}_f$ des $\delta\phi$ nuls sur Γ_{fl} . L'équation (4.4) est multipliée par $\delta\phi$ indépendante du

temps et intégrée sur le domaine Ω_f en appliquant la formule de Green ; la formulation variationnelle s'énonce alors :

Trouver $\phi \in \mathcal{C}_f^0$, tel que $\forall \delta\phi \in \mathcal{C}_f^0$, on a :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_f} \nabla\phi \nabla\delta\phi d\Omega + \frac{1}{c_0^2} \int_{\Omega_f} \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} \delta\phi d\Omega - \int_{\Gamma_{fs}} \mathbf{v}_s \delta\phi dS \\ + \frac{2}{c_0^2} \int_{\Omega_f} \nabla\phi \nabla \left(\frac{\partial\phi}{\partial t} \right) \delta\phi d\Omega + \frac{(\gamma-1)}{c_0^4} \int_{\Omega_f} \frac{\partial\phi}{\partial t} \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} \delta\phi d\Omega = 0. \end{aligned} \quad (4.10)$$

\mathbf{v}_s est la vitesse de la structure en contact avec le fluide :

$$\mathbf{v}_s = \mathbf{v}_f = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}.$$

4.3.2 Ecriture matricielle

La résolution directe de l'équation (4.10) est impossible dans la plupart des applications. On cherche alors une solution approchée, en projetant la solution ϕ dans un sous-espace qui conduit à un système matriciel de dimension N_f . Soit :

$$\phi(x, y, z, t) = N(x, y, z) \Phi(t),$$

avec N la matrice d'interpolation et Φ le potentiel de vitesse discrétisé, $\nabla\phi$ s'écrit alors sous la forme :

$$\nabla\phi(x, y, z, t) = B(x, y, z) \Phi(t),$$

où B est la dérivée spatiale de N .

L'équation (4.10) discrétisée par la méthode des éléments finis s'écrit finalement sous la forme :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_f} B^t B d\Omega \Phi + \frac{1}{c_0^2} \int_{\Omega_f} N^t N d\Omega \ddot{\Phi} - \int_{\Gamma_{fs}} N^t N_s dS \dot{U} \\ + \frac{2}{c_0^2} \int_{\Omega_f} N^t \Phi^t B^t B d\Omega \dot{\Phi} + \frac{(\gamma-1)}{c_0^4} \int_{\Omega_f} N^t N \dot{\Phi} N d\Omega \ddot{\Phi} = 0, \end{aligned} \quad (4.11)$$

soit :

$$(M_f + \Delta M_f) \ddot{\Phi} + \Delta B_f \dot{\Phi} + K_f \Phi - C \dot{U} = 0. \quad (4.12)$$

M_f et K_f sont respectivement les matrices de masse et de raideur du fluide, C est la matrice du couplage fluide-structure. Il s'agit des matrices présentées dans le chapitre

précédent. ΔM_f et ΔB_f sont des matrices variables qui décrivent le comportement non-linéaire du fluide :

$$\begin{cases} \Delta M_f & \Rightarrow \frac{(\gamma - 1)}{c_0^4} \int_{\Omega_f} N^t N \dot{\Phi} N d\Omega \\ \Delta B_f & \Rightarrow \frac{2}{c_0^2} \int_{\Omega_f} N^t \Phi^t B^t B d\Omega \end{cases} \quad (4.13)$$

4.3.3 Résolution par continuation – matrice tangente

L'équation (4.12) est une équation différentielle du second ordre non-linéaire. La résolution par continuation de ce type d'équation est décrite dans le chapitre 1. Il est alors nécessaire d'évaluer la matrice tangente dR de la fonction $R(X)$ définie par l'équation (4.12). La forme différenciée de l'équation (4.10) s'écrit :

$$\begin{aligned} dR = & \int_{\Omega_f} d(\nabla \phi) \nabla \delta \phi d\Omega + \frac{1}{c_0^2} \int_{\Omega_f} d\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}\right) \delta \phi d\Omega - \int_{\Gamma_{fs}} d(\mathbf{v}_f) \delta \phi dS \\ & + \frac{2}{c_0^2} \left[\int_{\Omega_f} d(\nabla \phi) \nabla \left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right) \delta \phi d\Omega + \int_{\Omega_f} \nabla \phi d\left(\nabla \left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)\right) \delta \phi d\Omega \right] \\ & + \frac{(\gamma - 1)}{c_0^4} \left[\int_{\Omega_f} d\left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right) \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \delta \phi d\Omega + \int_{\Omega_f} \frac{\partial \phi}{\partial t} d\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}\right) \delta \phi d\Omega \right], \end{aligned} \quad (4.14)$$

ou encore, sous forme discrétisée :

$$\begin{aligned} dR = & \int_{\Omega_f} B^t B d\Omega d\Phi + \frac{1}{c_0^2} \int_{\Omega_f} N^t N d\Omega d\ddot{\Phi} - \int_{\Gamma_{fs}} N^t N_s dS d\dot{U} \\ & + \frac{2}{c_0^2} \left(\int_{\Omega_f} N^t \dot{\Phi}^t B^t B d\Omega d\Phi + \int_{\Omega_f} N^t \Phi^t B^t B d\Omega d\dot{\Phi} \right) \\ & + \frac{(\gamma - 1)}{c_0^4} \left(\int_{\Omega_f} N^t N \ddot{\Phi} N d\Omega d\dot{\Phi} + \int_{\Omega_f} N^t N \dot{\Phi} N d\Omega d\ddot{\Phi} \right), \end{aligned} \quad (4.15)$$

et sous forme matricielle :

$$dR = (M_f + \Delta M_f) \Delta \ddot{\Phi} + (\Delta B_f + \Delta D_f) \Delta \dot{\Phi} + (K_f + \Delta K_f) \Delta \Phi - C \Delta \dot{U}. \quad (4.16)$$

Ainsi, à un instant i donné, $R(X_i)$ est approximé comme suit :

$$R(X_i) \approx R(X_{i-1}) + \frac{\partial R(X_{i-1})}{\partial X} \Delta X + \frac{\partial R(X_{i-1})}{\partial \dot{X}} \Delta \dot{X} + \frac{\partial R(X_{i-1})}{\partial \ddot{X}} \Delta \ddot{X} \approx 0. \quad (4.17)$$

4.3.4 Problème couplé non-linéaire

La solution des équations (4.12) et (4.16) va dépendre de la vitesse de la structure en contact avec Ω_f , qui elle-même dépend de l'excitation. Pour avoir des hauts niveaux de pression, il faut que le niveau d'excitation soit aussi élevé. Ainsi, la structure se comporte en grands déplacement et les deux problèmes fluide et structure sont potentiellement non-linéaires. Le problème couplé non-linéaire se traduit par le système d'équations :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega_s} \underline{\mathbf{S}}(\mathbf{u}) : \underline{\mathbf{E}}(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) dV + \int_{\Omega_s} \rho_s \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \delta \mathbf{u} dV + \rho_0 \int_{\Gamma_{fs}} \frac{\partial \phi}{\partial t} \mathbf{n} \delta \mathbf{u} dS = \int_{\Gamma_{sc}} \mathbf{F} \delta \mathbf{u} dS, \\ \int_{\Omega_f} \nabla \phi \nabla \delta \phi d\Omega + \frac{1}{c_0^2} \int_{\Omega_f} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \delta \phi d\Omega - \int_{\Gamma_{fs}} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \delta \phi dS \\ \quad + \frac{2}{c_0^2} \int_{\Omega_f} \nabla \phi \nabla \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right) \delta \phi d\Omega + \frac{(\gamma - 1)}{c_0^4} \int_{\Omega_f} \frac{\partial \phi}{\partial t} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \delta \phi d\Omega = 0. \end{array} \right. \quad (4.18)$$

On obtient ainsi une formulation (U, Φ) du problème couplé fluide structure non-linéaire qui s'écrit sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} M_s & 0 \\ 0 & M_f + \Delta M_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{U} \\ \ddot{\Phi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \rho_0 C^T \\ -C & \Delta B_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U} \\ \dot{\Phi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_s + \Delta K_s & 0 \\ 0 & K_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ \Phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (4.19)$$

4.4 Réduction de modèle

Le système (4.19) est un système différentiel du second ordre non-linéaire en U et Φ . Nous proposons dans la suite une technique de réduction de modèle adaptée à cette formulation. Jusqu'à présent, la méthode des approximations combinées a montré un grand intérêt dans la résolution des équations différentielles non-linéaires pour des non-linéarités réparties. Cette méthode est adaptée aux équations différentielles où la non-linéarité se traduit par des perturbations au niveau des matrices de raideur et de masse. En acoustique non-linéaire, l'équation (4.19) montre que le comportement non-linéaire peut se traduire également par des perturbations au niveau de la matrice d'amortissement. Ceci empêche l'application de la méthode des approximations combinées dans sa forme actuelle. Cela dit, l'hypothèse des petites perturbations dans le

fluide permet toujours d'utiliser une approche modale pour prédire le comportement non-linéaire.

4.4.1 Base de réduction structurale

La structure en contact avec le fluide va subir des niveaux acoustiques élevés. Il est alors nécessaire de considérer un comportement non-linéaire en grands déplacements dans le domaine Ω_s . L'équation du mouvement de la structure en contact avec le fluide est traduite par la première ligne de l'équation (4.19) :

$$M_s \ddot{X} + (K_s + \Delta K_s) X + \rho_0 C^T \dot{\Phi} = F \quad (4.20)$$

L'influence du fluide sur le comportement de la structure est faible dans ce cas, le terme $\rho_0 C^T \dot{\Phi}$ peut être négligé dans la construction de la base de réduction. La méthode des approximations combinées est appliquée comme dans les chapitres précédents en considérant que le comportement non-linéaire est une perturbation du comportement linéaire. Ainsi, on pose :

$$X(t) = T_s q(t),$$

avec T_s la base de réduction calculée par la méthode des approximations combinées. Soit :

$$T_s = (I - B + B^2 - \dots) r_0, \quad (4.21)$$

avec :

$$\begin{cases} B = K_s^{-1} \Delta K_s, \\ r_0 = K_s^{-1} M_s T_s^0. \end{cases} \quad (4.22)$$

4.4.2 Base de réduction fluide

Comme mentionné auparavant, les petites perturbations supposées malgré le comportement non-linéaire du fluide vont permettre en première approximation d'utiliser les modes du fluide enrichis par la contribution de la structure pour construire une base de réduction. La base de réduction principale est construite avec les modes du fluide à

bords rigides qui vérifient le problème aux valeurs propres :

$$(K_f - \omega_f^2 M_f) T_0^f = 0. \quad (4.23)$$

Ces modes sont enrichis par la contribution de la structure à la réponse du fluide. Soit :

$$\Delta T_{s \rightarrow f} = (K_f - \omega^2 M_f)^{-1} C^T T_s. \quad (4.24)$$

Une orthogonalisation des vecteurs qui constituent cette sous base est nécessaire et la base du fluide aura la forme :

$$T_f = [T_f^0 \ \Delta T_{s \rightarrow f}]^\perp. \quad (4.25)$$

La base de réduction du modèle couplé assemble les deux bases indépendantes tout en prenant en compte le comportement non-linéaire ainsi que le couplage. Cette base s'écrit sous la forme :

$$T = \begin{bmatrix} T_s & 0 \\ 0 & T_f \end{bmatrix}. \quad (4.26)$$

4.5 Application

La cavité étudiée dans le chapitre précédent au paragraphe 3.5.3 dédié aux non-linéarités réparties est reprise. Il s'agit de la cavité à cinq parois rigides en contact avec une plaque mince encastrée sur ses bords.

L'influence des termes non-linéaires ajoutés aux équations est étudiée en premier lieu. Le modèle non-linéaire de Kuznetsov est comparé au modèle linéaire. L'exemple d'une excitation harmonique d'amplitude $200N$ et de fréquence $270Hz$ est repris en tenant compte des comportements non-linéaires structural et acoustique. Le lecteur est invité à consulter le tableau 3.5 du chapitre 3 qui recense les données relatives à cet exemple.

Le tableau 4.1 présente l'écart relatif du modèle linéaire par rapport au modèle de Kuznestsov au niveau des moments temporels en déplacement, vitesse et pression acoustique. D'après ces résultats, la structure n'est pas influencée par le comportement non-linéaire du fluide, ce qui paraît normal du fait que la contribution du fluide à la

	E	T	D
U	0.04	0.02	0.03
\dot{U}	0.06	0.02	0.02
P	-1.6	-0.6	-1.3

Tableau 4.1 – Ecart relatif en % sur les moments temporels entre le modèle acoustique linéaire et non-linéaire.

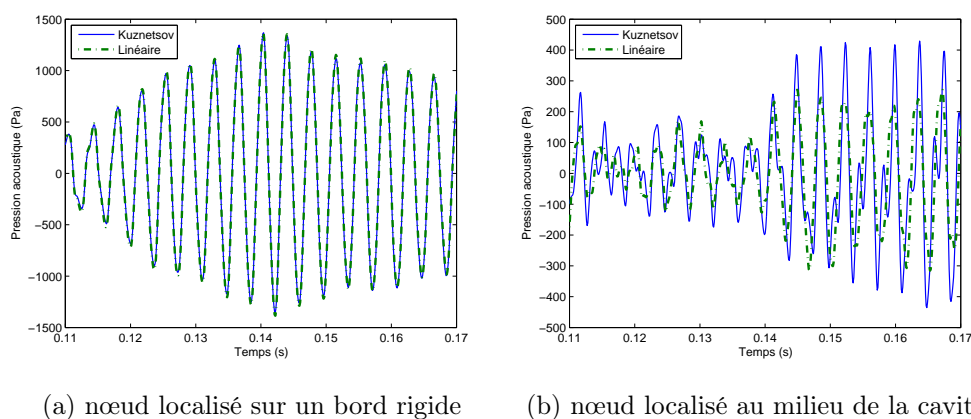


Figure 4.2 – Evolution temporelle de la pression acoustique sur deux nœuds différents.

réponse de la structure est faible. Par ailleurs, l'écart relatif au niveau de la pression acoustique semble également faible ($<1.6\%$). La comparaison des réponses au niveau de nœuds particuliers (un localisé au milieu de la cavité et l'autre sur un bord rigide) permet de montrer que cet écart présente une variance importante d'un nœud à un autre, les réponses linéaire et non-linéaire peuvent être identiques ou très distinctes (figure 4.2). Contrairement à ce qui peut être supposé, ce ne sont pas les zones subissant les plus grandes variations de pression acoustique qui sont perturbées par les termes non-linéaires mais bien le contraire. Il s'agit ici du plan nodal du vecteur propre du mode acoustique dominant la réponse ; les écarts des niveaux de pression sur les deux graphes de la figure 4.2 confirment ceci.

Les modèles réduits proposés dans cette application sont les suivants :

- un modèle construit à partir de la base modale du problème découplé contenant 40 modes de plaque en flexion ainsi que 40 en membrane et 80 modes acoustiques

	U	\dot{U}	Φ	P
BM	-26.5	-27.	-12.9	-22.4
CA	-0.2	-0.4	-2.9	-3.1

Tableau 4.2 – Erreur relative en % sur E par rapport au modèle **MEF**

(**BM**),

- un modèle construit de la façon suivante : les modes structure du modèle **BM** sont utilisés pour construire une nouvelle base par la méthode des approximations combinées et les modes acoustiques sont enrichis par la contribution de la structure (**CASEF**).

Le tableau 4.2 montre l’erreur relative des modèles réduits par rapport au modèle de référence au niveau des moments temporels E en déplacement, vitesse, potentiel de vitesse et pression acoustique. En comparant ce tableau au tableau 3.5 du chapitre 3, on constate que les erreurs ont peu évolué. Cela confirme d’une part l’hypothèse de la faible participation du fluide à la réponse de la structure et d’autre part, malgré le comportement non-linéaire, la confirmation de la pertinence de projeter la réponse sur les modes vibroacoustiques. Cette observation est liée à la qualité de la réponse du fluide obtenue avec le modèle **CASEF**. La figure 4.3 montre la réponse en pression acoustique des nœuds observés précédemment dans la figure 4.2. Ce résultat valide les conclusions en terme de nécessité de prendre en compte dans la base de réduction les effets non-linéaires structuraux et le couplage vibroacoustique en négligeant l’effet non-linéaire acoustique.

4.6 Conclusion

Dans ce chapitre, une description des équations de Westervelt et de Kuznetsov dédiées à l’acoustique non-linéaire est présentée. Après un rappel des hypothèses posées pour aboutir à ces équations, la formulation proposée par Kuznetsov a été choisie pour modéliser le problème par la méthode des éléments finis. Ces équations sont basées sur l’hypothèse de faibles perturbations qui engendrent un faible écart entre le modèle

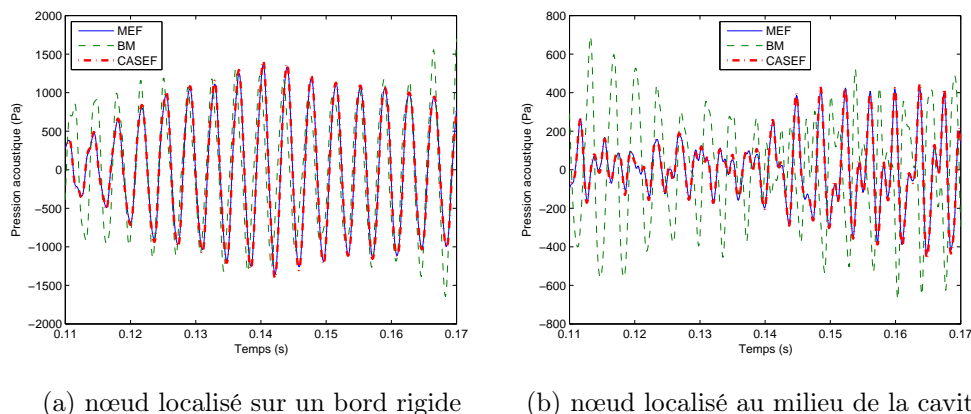


Figure 4.3 – Pression acoustique en fonction du temps sur deux nœuds différents.

linéaire et non-linéaire. Les simulations ont montré que cet écart peut varier d'une zone à l'autre. Par ailleurs, on a conclu que le choix de la base de projection n'est pas influencé par le comportement non-linéaire au sein du fluide sur l'exemple traité. Les erreurs relatives comparées au modèle de référence n'ont pas évolué malgré la modification du comportement au niveau global. D'après ces résultats, l'hypothèse qui a permis d'écarter le modèle de Westervelt peut être remise en question. Les deux modèles doivent être confrontés à un modèle expérimental afin de tirer des conclusions convenables.

Conclusion

La réduction de modèle pour des systèmes mécaniques oscillant dans un contexte non-linéaire a été présentée dans ce mémoire. Les vibrations des structures in-vacuum ou couplés à un fluide en présence de non-linéarités ont été plus particulièrement étudiées. Trois types de non-linéarités sont considérés : les non-linéarités localisées géométriques caractérisant une liaison non-linéaire entre deux structures, les non-linéarités géométriques en grands déplacements caractéristiques des structures minces et les non-linéarités acoustiques décrivant les hauts niveaux de pression.

Après un rappel général sur les vibrations des structures linéaires, les méthodes de résolution temporelle et fréquentielle dédiées aux problèmes non-linéaires ont été introduites. Un état de l'art sur les méthodes de réduction non-linéaires a été illustré et celles-ci ont été classées en trois catégories : bases de Ritz, décomposition propre orthogonale et modes normaux non-linéaires. La méthode des approximations combinées qui fait partie des méthodes de réduction par base de Ritz a été présentée. Cette méthode initialement développée pour des études d'optimisation et de robustesse par réanalyse approchée est adaptable au problème non-linéaire en le considérant comme une modification du problème linéaire. La base modale du problème linéaire est enrichie par des informations provenant de la nature de la modification à travers un développement en série de Taylor.

Dans ce contexte, la méthode des approximations combinées a été adaptée aux non-linéarités géométriques qui se traduisent par une modification de la matrice de raideur du système discret. La mise en équation dans le cas de plaques minces de Love-Kirchhoff a été rappelée en proposant une écriture qui met en évidence le couplage membrane-flexion et le comportement non-linéaire. Ce couplage implique une contribution des

modes de membrane (hautes fréquences) dans la réponse à une excitation des modes de flexion (basses fréquences). Le modèle réduit doit tenir compte de ces effets en incluant les modes membrane et flexion dans la base de réduction. L'enrichissement de la base modale par la méthode des approximations combinées permet d'obtenir un modèle réduit prédictif. Concernant le coût des simulations numériques, il a été montré que dans certains cas, la procédure la plus coûteuse en temps de calcul est l'évaluation de la force non-linéaire. Les coûts de calcul des autres procédures sont négligeables ce qui rend la réduction de modèle inefficace. En parallélisant la procédure d'évaluation de la force non-linéaire, le coût de l'évaluation de la force non-linéaire devient du même ordre de grandeur que les autres procédures de calcul et la réduction de modèle retrouve tout son intérêt. Afin d'accélérer les calculs, un critère temporel permettant l'actualisation de la base en fonction de l'évolution de l'énergie cinétique du système a été proposé.

Pour des non-linéarités localisées, l'action de la liaison non-linéaire est assimilée à une action externe appliquée au système. La base de Ritz du système linéaire est enrichie par la contribution statique de la liaison. Les résultats des simulations proposées ont montré une très bonne qualité de prédiction par la méthode d'enrichissement par les résidus statiques. Toutefois, cette qualité n'est pas assurée pour toutes les applications ; dans des cas particuliers, la méthode des approximations combinées s'avère être un très bon compromis.

Une nouvelle approche de synthèse modale pour un problème couplé vibroacoustique linéaire a été proposée sur la base de la méthode des approximations combinées. Cependant, l'application de cette méthode n'est pas immédiate en raison des matrices de perturbation nulles sur la diagonale. Une perturbation du problème numérique, sans impact sur le problème physique, a été introduite afin de contourner les problèmes qui empêchent l'application de la méthode. Cette nouvelle approche a été comparée à d'autres méthodes proposées dans la littérature et a montré à travers l'exemple traité une très bonne qualité de prédiction.

Pour une approche non-linéaire géométrique grands déplacements, on a montré que le couplage structural entre les effets de membrane et de flexion est indépendant du couplage vibroacoustique. Ainsi, la méthode des approximations combinées a été

appliquée au problème structural et l'action du couplage a été introduite en enrichissant les modes fluides du problème découplé par la contribution de la flexion à la réponse du fluide. Concernant les non-linéarités localisées, la base de réduction du problème structural non-couplé sert à enrichir la base modale du problème fluide non-couplé pour obtenir la contribution de la structure dans la réponse du fluide. Pour les deux cas de non-linéarité, il a été conclu que la réponse du problème peut être dominée par le comportement non-linéaire ou par le couplage ce qui justifie le choix de la méthode de réduction proposée.

Pour des non-linéarités acoustiques où le niveau de la pression acoustique peut dépasser les 130 dB , deux formulations d'équations d'ondes non-linéaires ont été étudiées et l'équation de Kuznetsov a été choisie pour la modélisation du problème. Ces équations sont basées sur l'hypothèse de petites fluctuations de pression devant la pression statique. Les simulations ont montré que la contribution du comportement non-linéaire peut varier spatialement. Le modèle réduit utilisé dans le même problème sans prendre en compte les effets non-linéaires acoustiques a montré une bonne convergence. Grace aux hypothèses sur le mouvement du fluide, l'enrichissement de la base fluide par la contribution non-linéaire du fluide n'est pas impératif.

Ces travaux ouvrent sur différents sujets de recherche en lien avec les problèmes vibratoires couplés. En premier lieu, les applications ont été étudiées dans le domaine temporel. Une extension des méthodes proposées au domaine fréquentiel est en cours de réalisation en utilisant la méthode de la balance harmonique couplée avec la méthode asymptotique numérique pour la résolution des équations non-linéaires. La synthèse modale proposée ici dans un cadre vibroacoustique peut s'étendre à d'autres problèmes couplés ou non-linéaires, liés à d'autres physiques. La réduction de modèle obtenue par la mise en œuvre de la méthode des approximations combinées, dans un contexte de couplage non-linéaire, permet à présent d'envisager d'autres études de sous-structuration dynamique ou d'optimisation notamment.

Bibliographie

- [1] E. Allgower and K. Georg. *Introduction to numerical continuation methods*.
- [2] M. Amabili. *Nonlinear vibrations and stability of shells and plates*. Cambridge University Press, 2008.
- [3] M. Amabili and C. Touzé. Reduced-order models for nonlinear vibrations of fluid-filled circular cylindrical shells : comparison of pod and asymptotic nonlinear normal modes methods. *Journal of fluids and structures*, 23(6) :885–903, 2007.
- [4] D. Amsallem, J. Cortial, K. Carlberg, and C. Farhat. A method for interpolating on manifolds structural dynamics reduced-order models. *International journal for numerical methods in engineering*, 80(9) :1241–1258, 2009.
- [5] R. Arquier, S. Bellizi, R. Bouc, and B. Cochelin. Two methods for the computation of non linear modes of vibrating systems at large amplitude. *Computers and structures*, 84 :1565–1576, 2006.
- [6] L. Azrar, R. Benamar, and R. White. Semi-analytical approach to the non-linear dynamic response problem of ss and cc beams at large vibration amplitudes part I : General theory and application to the single mode approach to free and forced vibration analysis. *Journal of Sound and Vibration*, 224(2) :183–207, 1999.
- [7] E. Balmès. Optimal ritz vectors for component mode synthesis using the singular value decomposition. *AIAA journal*, 34(6) :1256–1260, 1996.
- [8] E. Balmès. Parametric families of reduced finite element models. theory and applications. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 10(4) :381–394, 1996.
- [9] E. Balmès. Modèles analytiques réduits et modeles expérimentaux complets en dynamique des structures. Mémoire d’habilitation à diriger des recherches soutenue à l’Université Pierre et Marie Curie, 1997.

- [10] K. Bathe. Conserving energy and momentum in nonlinear dynamics : A simple implicit time integration scheme. *Computers & structures*, 85(7) :437–445, 2007.
- [11] K. Bathe and S. Gracewski. On nonlinear dynamic analysis using substructuring and mode superposition. *Computers & Structures*, 13(5-6) :699–707, 1981.
- [12] S. Bellizi and R. Bouv. A new formulation for the existence and calculation of nonlinear normal modes. *Journal of Sound and Vibration*, 287(3) :545–569, 2005.
- [13] T. Belytschko and D. Schoeberle. On the unconditional stability of an implicit algorithm for nonlinear structural dynamics. *Journal of Applied Mechanics*, 42 :865, 1975.
- [14] A. Bobillot and E. Balmes. Iterative techniques for eigenvalue solutions of damped structures coupled with fluids. *The American Institute of Aeronautics and Astronautics*, 43 :1–9, 2002.
- [15] N. Boivin, C. Pierre, and S. Shaw. Non-linear normal modes, invariance and modal dynamics approximations of non-linear systems. *Nonlinear Dynamics*, 8 :315–346, 1995.
- [16] M. Bouazizi, R. Majed, M. Guedri, and N. Bouhaddi. Prediction condensed models adapted to the nonlinear structures in time domain. *Journal of Sound and Vibration*, 320(3) :668–690, 2009.
- [17] F. Boumediene. *Méthode asymptotique numérique et techniques de réduction de modèles pour les vibrations non linéaires de plaques minces amorties*. PhD thesis, Université de Bretagne Sud, 2010.
- [18] A. Cardona and M. Géradin. Numerical integration of second order differential - algebraic systems in flexible mechanism dynamics. *Computer-Aided Analysis of Rigid and Flexible Mechanical Systems*, pages 501–529, 1994.
- [19] F. Chatelin. *Valeurs propres de matrices*. Masson, 1988.
- [20] S. Chentouf. *Simulations et essais dynamiques sur stators de moteurs de traction*. PhD thesis, Université de Franche Comté, 2011.
- [21] S. Chentouf, N. Bouhaddi, and C. Laitem. Robustness analysis by a probabilistic approach for propagation of uncertainties in a component mode synthesis context. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 25(7) :2426–2443, 2011.

- [22] J. Chung and G. Hulbert. A time integration algorithm for structural dynamics with improved numerical dissipation : the generalized- α method. *Journal of Applied Mechanics*, 60 :371, 1993.
- [23] B. Cochelin, N. Damil, and M. Potier-Ferry. The asymptotic-numerical method : an efficient perturbation technique for nonlinear structural mechanics. *Revue européenne des éléments finis*, 3(2) :281–297, 1994.
- [24] B. Cochelin, N. Damil, and M. Potier-Ferry. *Méthode asymptotique numérique*. Hermès Science publications, 2007.
- [25] R. Craig and M. Bampton. Coupling of substructures for dynamic analysis. *AIAA journal*, 6(7) :1313–1319, 1968.
- [26] O. Czygan and O. Von Estorff. Fluid-structure interaction by coupling bem and nonlinear fem. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 26(9) :773–779, 2002.
- [27] N. Damil and M. Potier-Ferry. A new method to compute perturbed bifurcations : application to the buckling of imperfect elastic structures. *International Journal of Engineering Science*, 28(9) :943–957, 1990.
- [28] R. Dautray, M. Artola, and J. Lions. *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques*. Masson, 1988.
- [29] J. Den Hartog. *Mechanical vibrations*. Dover Pubns, 1985.
- [30] J.-F. Deü, W. Larbi, and R. Ohayon. Vibration and transient response of structural–acoustic interior coupled systems with dissipative interface. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 197(51) :4894–4905, 2008.
- [31] M. Dokainish and K. Subbaraj. A survey of direct time-integration methods in computational structural dynamics – I. explicit methods. *Computers & Structures*, 32(6) :1371–1386, 1989.
- [32] G. Duvaut and J. Lions. *Les inéquations en mécanique et en physique*. Dunod, 1972.
- [33] M. Géradin and A. Cardona. *Flexible multibody dynamics : a finite element approach*. John Wiley, 2001.

- [34] M. G eradin and D. Rixen. *Th eorie des vibrations : application   la dynamique des structures*.
- [35] W. Govaerts. *Numerical methods for bifurcations of dynamical equilibria*.
- [36] A. Grama. *Introduction to Parallel Computing*. Pearson Education. Addison-Wesley, 2003.
- [37] M. Guedri, T. Weisser, and N. Bouhaddi. Reanalysis of nonlinear structures by a reduction method of combined approximations. In *Proceedings of the tenth international conference on computational structures technology, Valencia - Spain*, 2010.
- [38] P. Guillaume. *D eriv es d'ordre supérieur en conception optimale de forme*. PhD thesis, Université Paul Sabatier, 1994.
- [39] P. Guillaume and M. Masmoudi. D eriv es d'ordre supérieur en optimisation de domaines. *Comptes rendus de l'Académie des sciences. Série 1, Math matique*, 315(7) :859–862, 1992.
- [40] R. Guyan. Reduction of stiffness and mass matrices. *AIAA journal*, 3(2) :380, 1965.
- [41] C. Harris and C. Crede. *Shock and vibrations handbook*. McGraw-Hill, 1995.
- [42] F. Hemez and S. Doebling. From shock response spectrum to temporal moments and vice-versa. In *21st International Modal Analysis Conference, Kissimmee, FL*, 2003.
- [43] H. Hilber, T. Hughes, and R. Taylor. Improved numerical dissipation for time integration algorithms in structural dynamics. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, 5(3) :283–292, 1977.
- [44] T. Hughes. A note on the stability of newmark's algorithm in nonlinear structural dynamics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 11(2) :383–386, 1977.
- [45] T. Hughes, T. Caughey, and W. Liu. Finite-element methods for nonlinear elastodynamics which conserve energy. *Journal of Applied Mechanics*, 45 :366, 1978.

- [46] G. Hulbert and I. Jang. Automatic time step control algorithms for structural dynamics. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 126(1) :155–178, 1995.
- [47] S. Idelsohn and A. Cardona. A reduction method for nonlinear structural dynamic analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 49(3) :253–279, 1985.
- [48] B. Irons. Structural eigenvalue problems - elimination of unwanted variables. *AIAA journal*, 3 :961, 1965.
- [49] B. Irons. Role of part-inversion in fluid-structure problems with mixed variables. *The American Institute of Aeronautics and Astronautics*, 8(3), 2012.
- [50] L. Jezequel and C. Lamarque. Analysis of non-linear dynamical systems by the normal form theory. *Journal of Sound and Vibration*, 149 (3) :429–459, 1991.
- [51] D. Jiang, C. Pierre, and S. Shaw. Nonlinear normal modes for vibratory systems under harmonic excitation. *Journal of Sound and Vibration*, 288(4-5) :791–812, 2005.
- [52] M. Kaltenbacher. *Numerical Simulation of Mechatronic Sensors and Actuators*. Springer, 2004.
- [53] C. Kelley. *Iterative methods for linear and nonlinear equations*. Society for Industrial Mathematics, 1995.
- [54] G. Kerschen and J. Golinval. Physical interpretation of the proper orthogonal modes using the singular value decomposition. *Journal of Sound and Vibration*, 249(5) :849–865, 2002.
- [55] G. Kerschen, J.-C. Golinval, A. Vakakis, and L. Bergman. The method of proper orthogonal decomposition for dynamical characterization and order reduction of mechanical systems : An overview. *Nonlinear Dynamics*, 41 :147–169, 2005.
- [56] M. King and A. Vakakis. Energy-based formulation for computing nonlinear normal modes in undamped continuous systems. *Journal of Vibration and Acoustics*, 116(3) :332–340, 1994.
- [57] M. King and A. Vakakis. An energy-based approach to computing resonant nonlinear normal modes. *Journal of Applied Mechanics*, 63 :810–819, 1995.

- [58] U. Kirsch. *Design-Oriented Analysis of Structures : A Unified Approach*. Solid Mechanics and Its Applications. Springer, 2002.
- [59] U. Kirsch. Design oriented analysis of structures : unified approach. *Journal of engineering mechanics*, 129 :264, 2003.
- [60] U. Kirsch. A unified reanalysis approach for structural analysis, design, and optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 25(2) :67–85, 2003.
- [61] U. Kirsch and M. Bogomolni. Nonlinear and dynamic structural analysis using combined approximations. *Computers & structures*, 85(10) :566–578, 2007.
- [62] U. Kirsch, M. Bogomolni, and I. Sheinman. Efficient procedures for repeated calculations of the structural response using combined approximations. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 32(6) :435–446, 2006.
- [63] U. Kirsch, M. Bogomolni, and I. Sheinman. Nonlinear dynamic reanalysis of structures by combined approximations. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 195(33-36) :4420–4432, 2006.
- [64] U. Kirsch and S. Liu. Exact structural reanalysis by a first-order reduced basis approach. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 10(3) :153–158, 1995.
- [65] P. Kohnke. *ANSYS theory reference*. Ansys, 1999.
- [66] P. Krysl, S. Lall, and J. Marsden. Dimensional model reduction in non-linear finite element dynamics of solids and structures. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 51(4) :479–504, 2001.
- [67] B. Kuran and H. Özgüven. A modal superposition method for non-linear structures. *Journal of Sound and vibration*, 189(3) :315–339, 1996.
- [68] V. Kuznetsov. Equations of nonlinear acoustics. *Sov. Phys. Acoust*, 16(4) :467–470, 1971.
- [69] W. Lacarbonara, G. Rega, and A. Nayfeh. Resonant non-linear normal modes. part I : analytical treatment for structural one-dimensional systems. *International Journal of Non-linear Mechanics*, 38(6) :851–872, 2003.
- [70] W. Larbi, J.-F. Deü, and R. Ohayon. Coupled finite element-boundary element formulation for noise and vibration attenuation using shunt piezoelectric mate-

- rials. In *Design and Modeling of Mechanical Systems*, pages 127–134. Springer, 2013.
- [71] A. Lazarus, O. Thomas, and J.-F. Deü. Finite element reduced order models for nonlinear vibrations of piezoelectric layered beams with applications to nems. *Finite Elements in Analysis and Design*, 49(1) :35–51, 2012.
- [72] F. Leibfritz and B. Volkwein. Reduced order output feedback control design for pde systems using proper orthogonal decomposition and nonlinear semidefinite programming. *Linear algebra and its application*, 415 :542–575, 2006.
- [73] C. Lesueur. *Rayonnement acoustique des structures : vibroacoustique, interactions fluide-structure*. Collection de la Direction des études et recherches d’Électricité de France. Eyrolles, 1988.
- [74] Y. Liang, H. Lee, S. Lim, W. Lin, K. Lee, and C. Wu. Proper orthogonal decomposition and its applications—part I : Theory. *Journal of Sound and Vibration*, 252(3) :527–544, 2002.
- [75] T. Lieu, C. Farhat, and M. Lesoinne. Reduced-order fluid/structure modeling of a complete aircraft configuration. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 195(41) :5730–5742, 2006.
- [76] J. Lombard. *Contribution à la réduction des modèles éléments finis par synthèse modale*. PhD thesis, Université de Franche Comté, 1999.
- [77] D. Lucia, P. Beran, and W. Silva. Reduced-order modeling : new approaches for computational physics. *Progress in Aerospace Sciences*, 40(1) :51–117, 2004.
- [78] F. A. Lülfi, D.-M. Tran, and R. Ohayon. Reduced bases for nonlinear structural dynamic systems : A comparative study. *Journal of Sound and Vibration*, 2013.
- [79] M. Maess and L. Gaul. Substructuring and model reduction of pipe components interacting with acoustic fluids. *Mechanical systems and signal processing*, 20(1) :45–64, 2006.
- [80] G. Masson. *Synthèse modale robuste adaptée à l’optimisation de modèles de grande taille*. PhD thesis, Université de Franche Comté, 2003.

- [81] G. Masson, B. Ait Brik, S. Cogan, and N. Bouhaddi. Component mode synthesis CMS based on an enriched ritz approach for efficient structural optimization. *Journal of sound and vibration*, 296(4-5) :845–860, 2006.
- [82] S. Modak and E. Sotelino. The generalized method for structural dynamics applications. *Advances in Engineering Software*, 33(7) :565–575, 2002.
- [83] H. Morand and R. Ohayon. *Interactions fluides-structures*, volume 154. Masson, 1992.
- [84] N. Morris. The use of modal superposition in nonlinear dynamics. *Computers & Structures*, 7(1) :65–72, 1977.
- [85] F. Moussaoui and R. Benamar. Non-linear vibrations of shell-type structures : a review with bibliography. *Journal of sound and vibration*, 255(1) :161–184, 2002.
- [86] K. Naugolnykh and L. Ostrovski. *Nonlinear Wave Processes in Acoustics*. Cambridge Texts in Applied Mathematics. Cambridge University Press, 1998.
- [87] A. Nayfeh. *Introduction to perturbation techniques*. Wiley-VCH, 2011.
- [88] A. Nayfeh and D. Mook. *Nonlinear oscillations*. Wiley-VCH, 2008.
- [89] A. Nayfeh and S. Nayfeh. On nonlinear modes of continuous systems. *Journal of Vibration and Acoustics*, 116 :129–136, 1994.
- [90] N. Newmark. A method of computation for structural dynamics. *Journal of the Engineering Mechanics Division*, 85(7) :67–94, 1959.
- [91] R. Nickell. Nonlinear dynamics by mode superposition. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 7(1) :107–129, 1976.
- [92] D. Noreland, S. Bellizi, C. Vergez, and R. Bouc. Nonlinear modes of clarinet-like musical instruments. *Journal of Sound and Vibration*, 324 (3-5) :983–1002, 2009.
- [93] J. O’Callahan. A procedure for an improved reduced system IRS model. In *Proceedings of the 7th International Modal Analysis Conference*, pages 17–21, 1989.
- [94] R. Ohayon. Linear vibrations of structures coupled with an internal fluid. *Eccomas School*, 3(7), 2006.

- [95] R. Ohayon and C. Soize. *Structural acoustics and vibration : Mechanical models, variational formulations and discretization*. Academic press, 1997.
- [96] J. Ortega and W. Rheinboldt. *Iterative solution of nonlinear equations in several variables*.
- [97] M. Ouisse and E. Sadoulet-Reboul. Acoustique & vibro-acoustique – bruit des systèmes industriels. Cours – Ecole Nationale Supérieure de Mécanique et de Microtechniques, 2013.
- [98] B. Parlett. *The symmetric eigenvalue problem*.
- [99] P. Paultre. *Dynamique des structures : application aux ouvrages de génie civil*. Hermes science publ., 2005.
- [100] M. Paz. Practical reduction of structural eigenproblems. *Journal of Structural Engineering*, 109(11) :2591–2599, 1983.
- [101] M. Paz. Dynamic condensation. *AIAA journal*, 22(5) :724–727, 1984.
- [102] M. Peeters, R. Vigié, G. Sérandour, G. Kershen, and J. Golinval. Non-linear normal modes, part II : toward a practical computation using numerical continuation techniques. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 23 (1) :195–216, 2009.
- [103] J. Perret-Liaudet and E. Rigaud. Experiments and numerical results on non-linear vibrations of an impacting hertzian contact. part 2 : random excitation. *Journal of sound and vibration*, 265(2) :309–327, 2003.
- [104] E. Pesheck, C. Pierre, and S. Shaw. A new galerkin-based approach for accurate non-linear normal modes through invariant manifolds. *Journal of Sound and Vibration*, 249 (5) :971–993, 2002.
- [105] F. Pérignon. *Vibrations forcées de structures minces, élastiques, non-linéaires*. PhD thesis, Université de la Méditerranée, Marseille, 2004.
- [106] S. Rao. *Mechanical Vibrations*.
- [107] P. Raviart and J. Thomas. *Introduction à l’analyse numérique des équations aux dérivées partielles*. Masson, 1982.
- [108] J. Rayleigh and R. Lindsay. *The theory of sound*.

- [109] E. Rigaud and J. Perret-Liaudet. Experiments and numerical results on non-linear vibrations of an impacting hertzian contact. part 1 : harmonic excitation. *Journal of Sound and Vibration*, 265(2) :289–307, 2003.
- [110] R. Rosenberg. On non-linear vibrations of systems with many degrees of freedom. *Advances in Applied Mechanics*, 9 :155–242, 1966.
- [111] S. Shaw and C. Pierre. Normal modes for non-linear vibratory systems. *Journal of Sound and Vibration*, 164 (1) :85–142, 1993.
- [112] S. Shaw and C. Pierre. Normal modes of vibration for non-linear continuous systems. *Journal of Sound and Vibration*, 164 (1) :319–347, 1994.
- [113] J. Simo, N. Tarnow, and K. Wong. Exact energy-momentum conserving algorithms and symplectic schemes for nonlinear dynamics. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 100(1) :63–116, 1992.
- [114] J. Slater. A numerical method for determinig nonlinear normal modes. *Nonlinear dynamics*, 10 (1) :19–30, 1996.
- [115] K. Subbaraj and M. Dokainish. A survey of direct time-integration methods in computational structural dynamics – II. implicit methods. *Computers & Structures*, 32(6) :1387–1401, 1989.
- [116] C. Touzé and M. Amabili. Nonlinear normal modes for damped geometrically nonlinear systems : Application to reduced-order modelling of harmonically forced structures. *Journal of Sound and Vibration*, 298 :958–981, 2006.
- [117] C. Touzé, M. Amabili, and O. Thomas. Reduced-order models for large-amplitude vibrations of shells including in-plane inertia. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 197(21-24) :2030–2045, 2008.
- [118] C. Touzé, O. Thomas, and A. Chaigne. Hardening/softening behaviour in non-linear oscillations of structural systems using non-linear normal modes. *Journal of Sound and Vibration*, 273 (1-2) :77–101, 2004.
- [119] C. Touzé, O. Thomas, and A. Huberdeau. Asymptotic non-linear normal modes for large-amplitude vibrations of continuous structures. *Computers and structures*, 82 (31-32) :2671–2682, 2004.

- [120] Q. Tran. *Analyse robuste et optimisation de problème vibroacoustiques avec interfaces absorbantes*. PhD thesis, Université de Franche-Comté, 2009.
- [121] Q. Tran, M. Ouisse, and N. Bouhaddi. A robust component mode synthesis method for stochastic damped vibroacoustics. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 24(1) :164–181, 2010.
- [122] C. Truesdell, W. Noll, and S. Antman. *The non-linear field theories of mechanics*.
- [123] A. Vakakis. Non-linear normal modes NNMs and their applications in vibration theory : An overview. *Mechanical systems and signal processing*, 11(1) :3–22, 1997.
- [124] B. Wang, W. Pilkey, and A. Palazzolo. Reanalysis, modal synthesis and dynamic design. *State-of-the-Art Surveys on Finite Element Technology, ASME, New York*, pages 225–295, 1983.
- [125] G. Weickum, M. Eldred, and K. Maute. A multi-point reduced-order modeling approach of transient structural dynamics with application to robust design optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 38(6) :599–611, 2009.
- [126] P. Westervelt. Parametric acoustic array. *Journal of the Acoustical Society of America*, 35(4) :535–537, 1963.
- [127] W. Wood, M. Bossak, and O. Zienkiewicz. An alpha modification of newmark’s method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 15(10) :1562–1566, 1980.
- [128] K. Worden and G. Tomlinson. *Nonlinearity in structural dynamics : detection, identification, and modelling*. Taylor & Francis, 2001.
- [129] K. Wyckaert, F. Augusztinovicz, and P. Sas. Vibro-acoustical modal analysis : Reciprocity, model symmetry, and model validity. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 100 :3172, 1996.
- [130] O. Zienkiewicz and Taylor. *The finite element method : Solid mechanics*, volume 2. Butterworth-Heinemann, 2000.
- [131] O. Zienkiewicz and Y. Xie. A simple error estimator and adaptive time stepping procedure for dynamic analysis. *Earthquake engineering & structural dynamics*, 20(9) :871–887, 1991.

Annexe A

Eléments d'algèbre matricielle

A.1 Décomposition en valeurs singulières

La décomposition en valeurs singulières (*SVD*) est une méthode algébrique pour factoriser les matrices rectangulaires. Soit T la matrice à factoriser, de taille $(n * t)$ avec n le nombre de ddl et t l'ordre de troncature de la base ($n \gg t$). La *SVD* consiste à écrire T sous la forme :

$$T = U \Sigma V^T, \quad (\text{A.1})$$

où U et V sont des matrices rectangulaires de la même taille que T et Σ est une matrice diagonale contenant des valeurs singulières positives ou nulles classées par ordre décroissant. Si T ne vérifie ni la propriété d'orthogonalité ni celle de l'unicité, Σ aura des valeurs nulles ou quasi nulles sur la diagonale et les vecteurs associés à ces valeurs singulières devront être négligés pour garantir un bon conditionnement du problème. On écrit ainsi T sous la forme :

$$T = U_1 \Sigma_1 V_1^T + U_2 \Sigma_2 V_2^T, \quad (\text{A.2})$$

avec,

$$U = [U_1 \ U_2], \ \Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & \Sigma_2 \end{bmatrix}, \ V = [V_1 \ V_2], \ \text{et } |\Sigma_{2i}| < \tau.$$

τ est un seuil à définir.

La nouvelle forme de T s'écrit :

$$T_{SVD} = U_1 \Sigma_1 V_1^T. \quad (\text{A.3})$$

L'ordre de troncature de la SVD correspond au rang de la base T , ainsi le rang de T est égal au nombre de valeurs singulières contenus dans Σ_1 . Le seuil τ n'est pas toujours évident à estimer a priori surtout dans le cas où la base de réduction est actualisée. Dans cette situation, le cumul d'erreurs engendrées par une mauvaise troncature mène souvent à la divergence des résultats. Au lieu de définir τ , on peut utiliser le rapport de la valeur sigulière maximale sur la valeur sigulière minimale choisie, ce qui revient à se fixer un rapport maximal admissible eps tel que :

$$\frac{\Sigma_1^{max}}{\Sigma_1^{min}} > eps,$$

avec eps de l'ordre de 10^{-5} ou 10^{-6} . Ce critère souvent utilisé dans la littérature, n'est pas toujours adapté pour les problèmes réduits nécessitants la réactualisation des bases de réductions. La valeur eps est une valeur imposée a posteriori après une étude de convergence alors que dans le cas d'une base actualisée il est nécessaire d'avoir un critère imposé a priori. Le calcul d'une valeur singulière limite permet de faire un choix à priori. Cette valeur s'écrit sous la forme suivante :

$$\Sigma_{limite} = \Sigma_{max} * n * eps_0. \quad (\text{A.4})$$

eps_0 est le zéro de la machine, elle est de l'ordre de 10^{-24} . Les valeurs singulières supérieures à Σ_{limite} sont attribuées à Σ_1 .

A.2 Inversion des matrices singulières

La matrice K symbolisant la raideur du modèle est définie semi-positive. Dans des cas spécifiques où la structure n'est soumise ni à des conditions aux limites ni à des précontraintes ou dans le cas d'un fluide occupant un volume fermé cette matrice présente une singularité numérique et son inverse explicite n'existe pas. Or cette inversion est requise pour calculer des résidus statiques ou approximer des bases de réduction pour des méthodes telle que la technique des approximations combinées. Différentes astuces numériques existent pour palier la problématique de singularité.

A.2.1 Filtrage des modes de corps rigides

Dans le cas où K est singulière, le problème aux valeurs propres admet un certain nombre de modes de corps rigides. Une première méthode consiste à construire une matrice de filtrage des modes de corps rigides qui est projetée sur la matrice de flexibilité de la structure qui est rendue isostatique par blocage d'un certain nombre de degrés de libertés égal au nombre de modes de corps rigides.

Pour cela, il convient d'adopter une nouvelle réorganisation de la matrice de raideur telle que :

$$K = \begin{bmatrix} K_{bb} & K_{bl} \\ K_{lb} & K_{ll} \end{bmatrix}.$$

b et l correspondent respectivement aux degrés de libertés bloqués et libres. La taille de b est le même que le nombre de modes de corps rigides.

Soit G une matrice ayant la taille de K , contenant la matrice de flexibilité associée à K_{ll} :

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & K_{ll}^{-1} \end{bmatrix}.$$

Soit ϕ_r la base modale associée aux valeurs propres associées aux modes de corp rigide.

La matrice de filtrage des modes de corps rigides P est construite telle que :

$$P = I - M\phi_r\phi_r^T.$$

La pseudo-flexibilité S associée à K sera la projection de P sur G :

$$K^+ = S = P^T G P.$$

A.2.2 Décalage spectral

Une méthode alternative consiste à appliquer un décalage spectral. Cette technique a été développée initialement pour les problèmes aux valeurs propres avec des matrices singulières. Le problème aux valeurs propres

$$(K - \lambda M) \varphi,$$

admet les mêmes vecteurs propres que le problème :

$$(K + \mu M - (\lambda + \mu)M) \varphi.$$

avec μ la valeur du décalage spectral qui est souvent inférieure à la première valeur propre du problème. La raideur du problème n'est plus la matrice K mais le terme $(K + \mu M)$ qui lui est défini positif.

Annexe B

Expression de la matrice tangente des plaques en grands déplacements

En partant de l'équation (2.24) qui traduit le problème dynamique, on a :

$$Md\ddot{X} + df_{nl}(X) - dF = 0, \quad (\text{B.1})$$

soit,

$$Md\ddot{X} + \frac{\partial f_{nl}(X)}{\partial X}dX - dF = 0 \quad (\text{B.2})$$

Or la matrice tangente K^t correspond au terme $\frac{\partial f_{nl}(X)}{\partial X}$, d'où

$$Md\ddot{X} + K^tdX - dF = 0 \quad (\text{B.3})$$

La matrice tangente s'écrit sous la forme suivante :

$$K^t = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_{\tilde{U}}}{\partial \tilde{U}} & \frac{\partial f_{\tilde{U}}}{\partial \tilde{W}} \\ \frac{\partial f_{\tilde{W}}}{\partial \tilde{U}} & \frac{\partial f_{\tilde{W}}}{\partial \tilde{W}} \end{bmatrix} \quad (\text{B.4})$$

Ecriture du terme df_{nl} :

$$df_{nl}(X) = df_{\tilde{U}}(X) + df_{\tilde{W}}(X) \quad (\text{B.5})$$

Ecriture du terme $df_{\tilde{U}}$:

$$\begin{aligned}
df_{\tilde{U}}(X) &= d \left(\int_{\Gamma_m} B^{mT} D^m B^m \tilde{U} dS + \int_{\Gamma_m} \frac{1}{2} B^{mT} D^m B^{nl}(\tilde{W}) \tilde{W} dS \right) \\
&= \int_{\Gamma_m} B^{mT} D^m B^m d\tilde{U} + \int_{\Gamma_m} \frac{1}{2} B^{mT} D^m \frac{\partial (B^{nl}(\tilde{W}) \tilde{W})}{\partial \tilde{W}} d\tilde{W} dS \\
&= \int_{\Gamma_m} B^{mT} D^m B^m d\tilde{U} dS + \int_{\Gamma_m} \frac{1}{2} B^{mT} D^m \left[\frac{\partial B^{nl}(\tilde{W})}{\partial \tilde{W}} \tilde{W} + B^{nl}(\tilde{W}) \right] d\tilde{W} dS
\end{aligned} \tag{B.6}$$

Or, $B^{nl}(\tilde{W})$ est linéaire en \tilde{W} : $\frac{\partial B^{nl}(\tilde{W})}{\partial \tilde{W}} \tilde{W} = B^{nl}(\tilde{W})$

$$df_{\tilde{U}}(X) = \int_{\Gamma_m} B^{mT} D^m B^m d\tilde{U} dS + \int_{\Gamma_m} B^{mT} D^m B^{nl}(\tilde{W}) d\tilde{W} dS \tag{B.7}$$

Ecriture du terme $df_{\tilde{W}}$:

$$\begin{aligned}
df_{\tilde{W}}(X) &= d \left(\int_{\Gamma_m} B^{nlT}(\tilde{W}) D^m B^m \tilde{U} dS + \int_{\Gamma_m} \left(\frac{1}{2} B^{nlT}(\tilde{W}) D^m B^{nl}(\tilde{W}) + B^{fT} D^f B^f \right) \tilde{W} dS \right) \\
&= \int_{\Gamma_m} B^{nlT}(\tilde{W}) D^m B^m d\tilde{U} dS \\
&\quad + \int_{\Gamma_m} d(B^{nlT}(\tilde{W})) D^m B^m \tilde{U} dS + \int_{\Gamma_m} \frac{1}{2} d(B^{nlT}(\tilde{W})) D^m B^{nl}(\tilde{W}) \tilde{W} dS \\
&\quad + \int_{\Gamma_m} \frac{1}{2} B^{nlT}(\tilde{W}) D^m d(B^{nl}(\tilde{W}) \tilde{W}) dS + \int_{\Gamma_m} B^{fT} D^f B^f d\tilde{W} dS
\end{aligned} \tag{B.8}$$

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma_m} d(B^{nlT}(\tilde{W})) D^m B^m \tilde{U} dS + \int_{\Gamma_m} \frac{1}{2} d(B^{nlT}(\tilde{W})) D^m B^{nl}(\tilde{W}) \tilde{W} dS = \\
\int_{\Gamma_m} d(B^{nlT}(\tilde{W})) D^m \left(B^m \tilde{U} + \frac{1}{2} B^{nl}(\tilde{W}) \tilde{W} \right) dS = \\
\int_{\Gamma_m} d(B^{nlT}(\tilde{W})) D^m E^m dS
\end{aligned} \tag{B.9}$$

Ecriture du terme $dB^{nlT}(\tilde{W})D^m E^m$:

$$\begin{aligned}
 d\left(B^{nlT}(\tilde{W})\right) D^m E^m &= G^T d\left(H(\tilde{W})^T\right) D^m E^m \\
 &= G^T d\left(H(\tilde{W})^T\right) T^m \\
 &= G^T \begin{bmatrix} dw_{,x} & 0 & dw_{,y} \\ 0 & dw_{,y} & dw_{,x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_x^m \\ T_y^m \\ T_{xy}^m \end{Bmatrix} \\
 &= G^T \begin{bmatrix} T_x^m & T_{xy}^m \\ T_{xy}^m & T_y^m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} dw_{,x} \\ dw_{,y} \end{Bmatrix} \\
 &= G^T \begin{bmatrix} T_x^m & T_{xy}^m \\ T_{xy}^m & T_y^m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{,x}^w & N_{,x}^{\theta_x} & N_{,x}^{\theta_y} \\ N_{,y}^w & N_{,y}^{\theta_x} & N_{,y}^{\theta_y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\tilde{w} \\ d\tilde{\theta}_x \\ d\tilde{\theta}_y \end{Bmatrix} \\
 &= G^T T^m G d\tilde{W}
 \end{aligned} \tag{B.10}$$

$$\int_{\Gamma_m} \frac{1}{2} B^{nlT}(\tilde{W}) D^m d\left(B^{nl}(\tilde{W})\tilde{W}\right) dS = \int_{\Gamma_m} B^{nlT}(\tilde{W}) D^m B^{nl}(\tilde{W}) d\tilde{W} dS \tag{B.11}$$

Ceci a été expliqué précédemment (B^{nl} est linéaire en w).

Finalement, $df_{\tilde{W}}$ s'écrit sous la forme :

$$df_{\tilde{W}}(X) = \int_{\Gamma_m} \left(B^{nlT}(\tilde{W}) D^m B^m d\tilde{U} + G^T T^m G d\tilde{W} + B^{nlT}(\tilde{W}) D^m B^{nl}(\tilde{W}) d\tilde{W} + B^{fT} D^f B^f d\tilde{W} \right) dS \tag{B.12}$$

$$df_{nl}(X) = \int_{\Gamma_m} \begin{bmatrix} B^{mT} D^m B^m & B^{mT} D^m B^{nl}(\tilde{W}) \\ B^{nlT}(\tilde{W}) D^m B^m & G^T T^m G + B^{nlT}(\tilde{W}) D^m B^{nl}(\tilde{W}) + B^{fT} D^f B^f \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\tilde{U} \\ d\tilde{W} \end{Bmatrix} dS \tag{B.13}$$

Finalement, la matrice tangente K^t s'écrit sous la forme :

$$\begin{aligned}
K^t = & \underbrace{\int_{\Gamma_m} \left(\begin{bmatrix} B^{mT} D^m B^m & 0 \\ 0 & B^{fT} D^f B^f \end{bmatrix} \right) dS}_{K^l} \\
& + \underbrace{\int_{\Gamma_m} \left(\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} B^{mT} D^m B^{nl}(\tilde{W}) \\ B^{nlT}(\tilde{W}) D^m B^m & \frac{1}{2} B^{nlT}(\tilde{W}) D^m B^{nl}(\tilde{W}) \end{bmatrix} \right) dS}_{K^{nl}(\tilde{w})} \quad (B.14) \\
& + \int_{\Gamma_m} \left(\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} B^{mT} D^m B^{nl}(\tilde{W}) \\ 0 & \frac{1}{2} B^{nlT}(\tilde{W}) D^m B^{nl}(\tilde{W}) + G^T T^m G. \end{bmatrix} \right) dS
\end{aligned}$$

Résumé

Les structures soumises à des vibrations sont rencontrées dans diverses applications. Dans de nombreux cas, elles sont de nature linéaires, mais quand les amplitudes des oscillations deviennent importantes, cela provoque un comportement non-linéaire. Par ailleurs, les oscillations des structures dans un milieu fluide entraînent une interaction fluide-structure. Cette thèse porte sur la modélisation du problème fluide-structure non-linéaire. Les cas de non-linéarités étudiés sont la non-linéarité grands-déplacements caractéristique des structures minces, la non-linéarité localisée géométrique décrivant une liaison non-linéaire entre deux structures et la non-linéarité acoustique particulière des très hauts niveaux de pression.

Pour la modélisation de ces problèmes, il se peut que le calcul en réponse demeure infaisable en raison du temps de calcul. D'une part, on est amené à résoudre des systèmes matriciels (symétriques ou non) de grandes tailles générés par la méthode des éléments finis et d'autre part, cette résolution demande une évaluation de la force non-linéaire à chaque itération. Afin de diminuer le coût de calcul, la réduction de modèle par des bases de réductions couplées avec un algorithme parallélisant l'évaluation de la force non-linéaire, est une alternative à la résolution du système complet. La construction des bases de réduction doit s'adapter au mieux à chaque problème traité. La base modale du problème linéaire est une première approximation puis elle est enrichie par des informations qui proviennent à la fois de la nature du couplage et du comportement non-linéaire.

Mots clés : Vibrations non-linéaires - Vibroacoustique - Réduction de modèle - Méthode des approximations combinées - Non-linéarités géométriques - Non-linéarité acoustique - Intégration temporelle.

Abstract

Structures subjected to vibrations are found in various applications. In many cases, they behave in a linear way, but when the amplitudes of the oscillations become important, it causes a nonlinear behavior. Moreover, the oscillations of structures in a fluid field lead to a fluid-structure interaction. This thesis focuses on the modeling of nonlinear fluid-structure problem. Different kind of nonlinearities are studied in this work including the large-displacement nonlinearity characteristic of thin structures, the localized geometrical nonlinearity describing a nonlinear link between two structures, and the acoustic nonlinearity characteristic of very high levels of pressure.

Modeling such problems are time and memory consuming, that may lead to a limitations of the model. Therefore, it is necessary to solve a large matrix system (either symmetric or not) generated by the finite element method and the resolution needs an evaluation of the nonlinear force at each iteration. In order to reduce the computational cost, model reduction with reduced bases combined with parallelization of the nonlinear force evolution is proposed as an alternative to the resolution of complete systems. Building reduction bases must be adapted to each concerned problem. The eigenmode of the linear problem is a first approximation and it is enriched with information coming from both coupling and nonlinear behaviors.

Keywords : Nonlinear vibration - Vibroacoustic - Reduced order modeling - Combined approximations method - Geometrical nonlinearities - Acoustic nonlinearity - Time integration.

